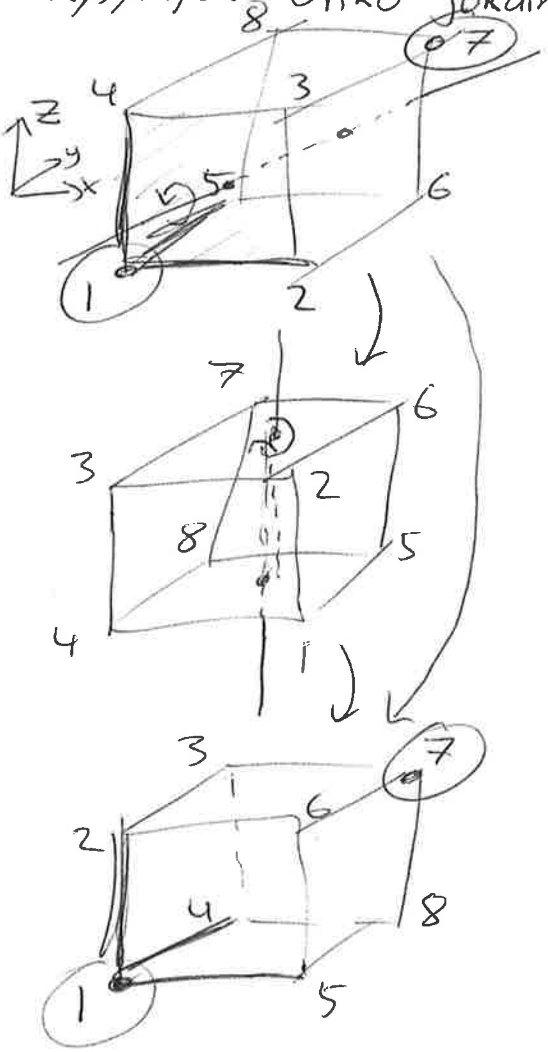
Kurssin tarkoitus: tutustua Lien teoriaan hautautumatta esitietoihin (diff. geometria, topologia, ...)

<u>Lien teoria:</u> (Sophus Lie, 1842–1899, Norja)
jatkuvien symmetriaperheiden tarkastelua algebrallisia ja geometrisia menetelmiä yhdistäen.

<u>Esim</u>

Kuution vs. pallon kierrot

Kysymys: Onko jokainen kierto kierto akselin suhteen?



kierto A = 90° y-akselin suhteen

kierto B = 90° z-akselin suhteen

kierto $B \circ A = 120°$ $(x+y+z)$-akselin suhteen

Kuution kiertoja on äärellinen määrä $(24 = \# S_4)$
$\Rightarrow$ kysymykseen voi vastata pelkällä laskuteholla.
Pallon kiertoja on ääretön määrä. Kuitenkin matriisiryhmien avulla saadaan näppärästi vastaus.

Kurssin sisältö

I Matriisiryhmät (Lien ryhminä)
- tärkeitä esimerkkejä (kiertoryhmät jne)
  paljon käytetyistä matriisiryhmistä

II Matriisieksponentiaali ja -logaritmi
- Lien algebra $\leftrightarrow$ ryhmä vastaavuuteen
  konkreettinen ilmentymä

III Lien algebra $\leftrightarrow$ Lien ryhmä vastaavuus
- miten jatkuvuus ja derivoituvuus auttavat ryhmän tarkastelua
- epälineaaristen ongelmien muuttaminen lineaarisiksi
  menettämättä lainkaan/juurikaan informaatiota

I Matriisiryhmät

I.1. Matriisiavaruudet

Kurssilla tarkastellaan sekä reaalisia että kompleksisia avaruuksia. Suurin osa väittämistä ei välitä onko kyseessä $\mathbb{R}$ vai $\mathbb{C}$, jolloin käytetään merkintää $\mathbb{K}$.

Määr 1.1

$$\mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{K}) = \left\{ \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix} : a_{jk} \in \mathbb{K} \right\}$$

On kaikkien n-rivisten, m-sarakkeisten, $\mathbb{K}$-kertoimisten matriisien avaruus.

Matriisin $A \in \mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{K})$ rivin r sarakkeen s alkiota merkitään A_{rs} tai a_{rs}.

Tämän kurssin kannalta 2 tärkeää näkökulmaa $\mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{K})$:n.

(1) $\mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{K})$ on $\mathbb{K}$-vektoriavaruus ja $\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{K}) = n \cdot m$

(2) Kun $n=m$, $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K}) = \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ on rengas kertolaskulla

$$AB = [A_{rs}]_{rs} \cdot [B_{rs}]_{rs} = \left[\sum_{k=1}^{n} A_{rk} B_{ks} \right]_{rs}$$

(1) $\Rightarrow$ Topologia (jatkuvuus, avoimet joukot, ...)
Sileä struktuuri (derivoituvuus)

(2) $\Rightarrow$ algebralliset ominaisuudet

$\Rightarrow$ Lien teorian ainesosat

Olennaisia käsitteitä

(1)	(2)
avoin joukko	homomorfismi
suljettu joukko	ydin ja kuvajoukko
jatkuva kuvaus	(normaali) aliryhmä
(polku)yhtenäinen joukko	toiminto
kompakti joukko	

Matriisien tulkinta lineaarikuvauksina

Merkitään $e_j = (0, \ldots, 0, \underset{j:\text{s alkio}}{1}, 0, \ldots, 0)$ $\mathbb{K}^m$:n standardikannan alkioita ja samaistetaan

vektori $x = x_1 e_1 + \ldots + x_m e_m \in \mathbb{K}^m$ ja sarakematriisi $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{m\times 1}(\mathbb{K})$

Matriisi $A \in \mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{K})$ antaa lineaarikuvauksen

$A : \mathbb{K}^m \to \mathbb{K}^n$ $\quad A(x) = {}^{L}A(x) = Ax = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^m a_{1k} x_k \\ \vdots \\ \sum_{k=1}^m a_{nk} x_k \end{bmatrix} = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^m a_{jk} x_k \underset{\in \mathbb{K}^n}{e_j}$$

Matriisien tulo vastaa kuvausten yhdistämistä

$A \in \mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{K})$	$B \in \mathcal{M}_{k\times m}(\mathbb{K})$	$BA \in \mathcal{M}_{k\times m}(\mathbb{K})$
$A : \mathbb{K}^m \to \mathbb{K}^n$	$B : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^k$	$B \circ A : \mathbb{K}^m \to \mathbb{K}^k$

I.2. Yleinen lineaarinen ryhmä ja matriisiryhmät

Määr 2.1 (topologinen ryhmä)

Joukko G varustettuna laskutoimituksella $G \times G \to G$ on ryhmä jos

(i) laskutoimitus on assosiatiivinen: $x(yz) = (xy)z$

(ii) $\exists$ neutraalialkio $e \in G$: $xe = x = ex$

(ii) $\forall x \in G$ $\exists$ käänteisalkio $x^{-1} \in G$: $xx^{-1} = e = x^{-1}x$

G on topologinen ryhmä, jos lisäksi

(iv) laskutoimitus $(x,y) \mapsto xy$ on jatkuva

(v) käänteiskuvaus $x \mapsto x^{-1}$ on jatkuva

Huom

Joukolle jatkuvuudesta puhuminen ei ole järkevää, tarvitaan topologia. Tällä kurssilla ~~topologia~~ topologia (eli erityisesti jatkuvuuden käsite) periytyy inkluusiosta

$$M_n(\mathbb{K}) \subset \mathbb{K}^{n^2}$$

Määr 2.2 Yleinen lineaarinen ryhmä

on matriisiavaruuden osajoukko

$$GL(n, \mathbb{K}) = \{ A \in M_n(\mathbb{K}) : \exists A^{-1} \}$$

varustettuna matriisien kertolaskulla.

TI 9.1

6

Lause 2.3

Yleinen lineaarinen ryhmä on topologinen ryhmä

Todistus

(i) Olk $A, B, C \in GL(n, \mathbb{K})$.

Assosiatiivisuuden voi tarkistaa suoraan matriisitulon määritelmän kautta pienellä indeksipuljauksella, mutta Lineaarikuvaustulkinta on tässä näppärä:

$$\forall x \in \mathbb{K}^n \simeq \mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{K}) \quad (AB)Cx = (A \circ B) \circ C(x)$$
$$= A(B(C(x)))$$
$$= A \circ (B \circ C)(x)$$
$$= A(BC)x$$

$$\Rightarrow (AB)C = A(BC)$$

(ii) $\forall A \in GL(n, \mathbb{K})$: $\quad AI = A = IA$

(iii) $\forall A \in GL(n, \mathbb{K}) \quad \exists A^{-1}$ joukon $GL(n, \mathbb{K})$ määr perusteella

(iv) Jatkuvuustarkasteluja varten huom

$f = (f_1, \dots, f_n) : \mathbb{K}^m \to \mathbb{K}^n$ jva $\Leftrightarrow$ jokainen $f_j : \mathbb{K}^m \to \mathbb{K}$ jva

Matriisikertolasku on jatkuvuustarkastelun kannalta kuvaus

$$\text{mult} : \mathbb{K}^{2n^2} \to \mathbb{K}^{n^2}, \quad \text{mult}(a_{11}, \dots, a_{nn}, b_{11}, \dots, b_{nn})$$
$$= \left(\sum_{k=1}^{n} a_{1k} b_{k1}, \dots, \sum_{k=1}^{n} a_{nk} b_{kn} \right)$$

Jokainen komponenttikuvaus $\text{mult}_{rs} : \mathbb{K}^{2n^2} \to \mathbb{K}$ on siis polynomi, ja siten jva $\Rightarrow$ mult jva.

(v) käänteiskuvauksen jatkuvuus saadaan vastaavasti käyttäen käänteismatriisin ~~liitto~~matriisiesitystä:

$$A^{-1} = \frac{\text{adj}(A)}{\det(A)}$$

missä liittomatriisin adj(A) rivin r sarakkeen s komponentti on

$$\operatorname{adj}(A)_{rs} = (-1)^{r+s} \det \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & \cancel{a_{1r}} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \cancel{\vdots} & & \vdots \\ \cancel{a_{s1}} & \cancel{\cdots} & \cancel{a_{sr}} & \cancel{\cdots} & \cancel{a_{sn}} \\ \vdots & & \cancel{\vdots} & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & \cancel{a_{nr}} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Näin ollen käänteiskuvauksen jatkuvuus seuraa determinantin jatkuvuudesta. ($\det : M_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ on polynomi) $\square$

Determinantin jatkuvuus kertoo enemmänkin $GL(n,\mathbb{K})$:n rakenteesta:

Lause 2.4

$GL(n,\mathbb{K}) \subset M_n(\mathbb{K})$ on avoin.

Todistus

Käänteismatriisi on olemassa $\Leftrightarrow \det \neq 0$, eli

$$GL(n,\mathbb{K}) = \det^{-1}(\mathbb{K} \setminus \{0\})$$

ja $\mathbb{K} \setminus \{0\} \subset \mathbb{K}$ on avoin, ja avoimen joukon alkukuva on avoin.

Lause 2.5

$GL(n,\mathbb{R})$ on epäyhtenäinen.

Määr 2.6

Joukko $X \subset \mathbb{K}^n$ on epäyhtenäinen jos $\exists U, V \subset \mathbb{K}^n$ s.e.

(i) $X = U \cup V$

(ii) U, V avoimia X:n suhteen

(iii) $U, V \neq \emptyset$

Lauseen 2.5 todistus

Asetetaan

$$U = \det^{-1}(\{x \in \mathbb{R} : x < 0\}) \quad \text{ja}$$
$$V = \det^{-1}(\{x \in \mathbb{R} : x > 0\})$$

(i) $U \cup V = \det^{-1}(\mathbb{R} \setminus \{0\}) = GL(n, \mathbb{R})$

(ii) U ja V ovat avoimia koska $(-\infty, 0)$ ja $(0, \infty)$ ovat avoimia.

(iii) $\det I = 1 \Rightarrow I \in V \neq \emptyset$ ja

$$\det \begin{bmatrix} -1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{bmatrix} = -1 \Rightarrow \begin{bmatrix} -1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{bmatrix} \in U \neq \emptyset \qquad \square$$

Huom

$\mathbb{C} \setminus \{0\}$ on yhtenäinen, joten determinantin tarkastelu ei kerro mitään $GL(n, \mathbb{C})$:n yhtenäisyydestä.
Toisaalta ei myöskään tiedetä edellisen perusteella vielä mitään $GL(n, \mathbb{R})$:n yhtenäisyyskomponenttien määrästä kuin että niitä on vähintään 2.

Yhtenäisyyskysymyksiin palataan myöhemmin kurssilla.

Määr 2.7 (matriisiryhmä)

Mikä tahansa yleisen lineaarisen ryhmän $GL(n,\mathbb{K})$ suljettu aliryhmä on <u>matriisiryhmä</u>.

Oletus, että $G < GL(n,\mathbb{K})$ on suljettu rajaa pois tiettyjä "huonosti käyttäytyviä" tapauksia, joissa haluttu algebran ja geometrian yhteys hajoaa.

Esim 2.8

Olkoon

$$G = \Bigg\{ \underbrace{\begin{bmatrix} e^{it} & 0 \\ 0 & e^{i\pi t} \end{bmatrix}}_{=:A_t} ;\ t \in \mathbb{R} \Bigg\} \subset GL(2,\mathbb{C}).$$

Tämä on aliryhmä, sillä $e^{it} \cdot e^{is} = e^{i(t+s)}$, joten

$$A_t \cdot A_s = A_{t+s} \in G \quad \forall A_t, A_s \in G \text{ ja}$$

$$I = A_0 \in G$$

Vaikka funktio $\mathbb{R} \to \mathbb{C};\ t \mapsto e^{it}$ on periodinen, eli erityisesti ei ole injektiivinen, funktio $\mathbb{R} \to G : t \mapsto A_t$ on injektiivinen:

$$A_t = A_s \iff \left\{ \begin{array}{l} e^{it} = e^{is} \iff t = s + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z} \\ e^{i\pi t} = e^{i\pi s} \iff t = s + 2m,\ m \in \mathbb{Z} \end{array} \right\} \iff t = s$$

Erityisesti ryhmänä $G \overset{\text{Isom}}{\simeq} (\mathbb{R},+)$.

Topologisesti G ei kuitenkaan käyttäydy kuten $\mathbb{R}$: kokonaisluvuille $k \in \mathbb{Z}$

$$A_{2k+1} = \begin{bmatrix} e^{i(2k+1)} & 0 \\ 0 & e^{i\pi(2k+1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{i(2k+1)} & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \in G$$

Sopivalle osajonolle $e^{i(2j_k+1)} \to -1$, mutta $-I \notin G$

$\Rightarrow -I \in \overline{G} \setminus G \Rightarrow G$ ei suljettu