Viimeksi:

- määriteltiin topologinen ryhmä $GL(n, \mathbb{K})$ ja matriisiryhmä
- $GL(n,\mathbb{K})$:n ominaisuuksia:
  - topologinen ryhmä
  - $GL(n,\mathbb{K}) \subset \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ on avoin
  - $GL(n,\mathbb{R})$ on epäyhtenäinen

Määr 2.9 (topologisten ryhmien morfismit ja isomorfismit)

Jos G ja H ovat topologisia ryhmiä, niin $\varphi : G \to H$ on topologisten ryhmien morfismi, jos φ on jatkuva homomorfismi.

Jos φ on ryhmäisomorfismi, ja φ^{-1} on myös jatkuva, niin topologiset ryhmät G ja H ovat isomorfiset

Lause 2.10

$\det : GL(n, \mathbb{K}) \to \mathbb{K}^* = (\mathbb{K} \setminus \{0\}, \cdot)$ on jatkuva homomorfismi

Todistus

det on polynomiaalinen $\Longrightarrow$ det on jatkuva, ja

$$\det(AB) = \det A \cdot \det B$$

Seuraus 2.11

$\{A \in GL(n,\mathbb{K}) : \det A = 1\}$ on matriisiryhmä, ja on $GL(n,\mathbb{K})$:n normaali aliryhmä.

Todistus

$\{A \in GL(n,\mathbb{K}) : \det A = 1\} = \ker \det$.

Homomorfismin ydin on normaali aliryhmä, ja suljetun joukon $\{1\} \in \mathbb{K}^*$ alkukuva on suljettu

Määr 2.12 Erityinen lineaarinen ryhmä

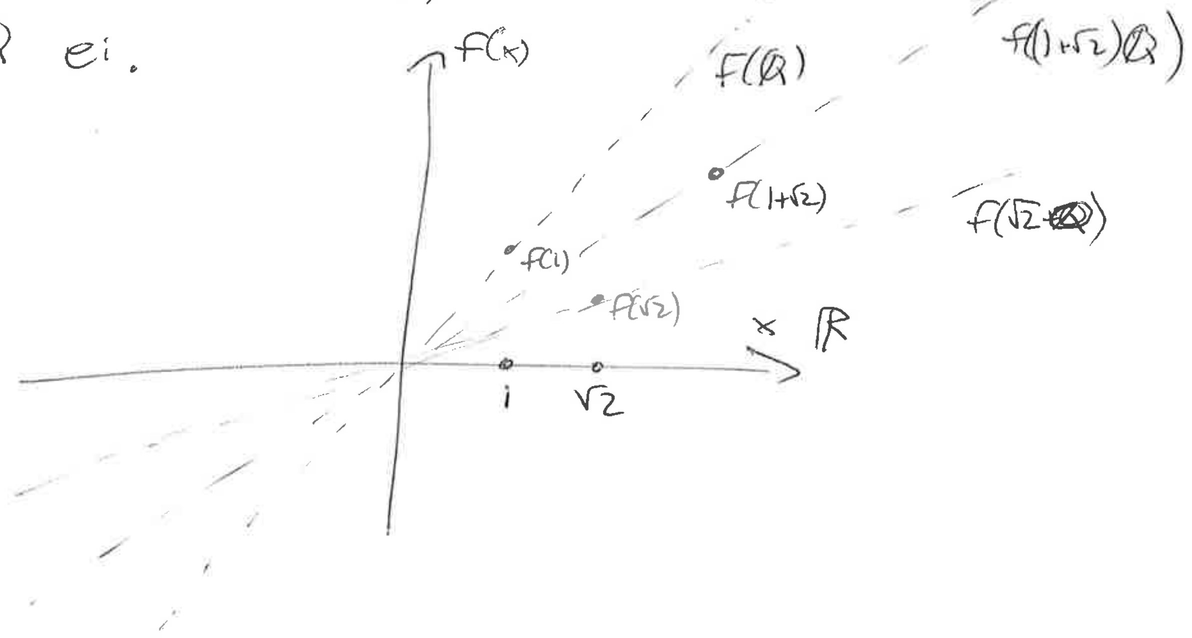
on $SL(n,\mathbb{K}) = \{A \in GL(n,\mathbb{K}) : \det A = 1\}$.

Epäjatkuvat homomorfismit ovat yleensä patologisempia kuin ei-suljetut aliryhmät. Esim matriisia varuuksien välille on vaikeaa konstruoida vahingossa mitään epäjatkuvaa homomorfismia.

Valinta-aksiooma $\Rightarrow \exists$ epätriviaali (eli ei nollakuvaus) homomorfismi $(\mathbb{R},+) \to (\mathbb{Q},+)$

(Konstruktio: käsitellään $\mathbb{R}$:ää $\mathbb{Q}$-vektoriavaruutena. Koska $\dim_{\mathbb{Q}} \mathbb{R} = \infty$, $\mathbb{Q}$-lineaarikuvauksilla $\mathbb{R} \to \mathbb{Q}$ saadaan patologisia homomorfismeja)

Homomorfismi $(\mathbb{R},+) \to (\mathbb{Q},+)$ ei voi olla jatkuva (paitsi jos se on nollakuvaus), sillä $\mathbb{R}$ on yhtenäinen, mutta $\mathbb{Q}$ ei.



Matriisiryhmien upotukset

Määr 2.13

Olk G, H matriisiryhmiä.
Matriisiryhmän G upotus matriisiryhmään H on jatkuva injektiivinen homomorfismi $\varphi : G \to H$, jolle $\varphi(G) < H$ on suljettu.

Kompleksiset matriisiryhmät voidaan aina upottaa isompiin reaalisiin matriisiryhmiin.

Lause 2.14

$\rho : \mathbb{C} \to M_2(\mathbb{R})$, $\rho(a+bi) = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$
on injektiivinen jatkuva rengashomomorfismi, ja $\rho(\mathbb{C})$ on suljettu.

Tod

Homomorfismi:

$$\rho(a+bi+c+di) = \begin{pmatrix} a+c & -b-d \\ b+d & a+c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c & -d \\ d & c \end{pmatrix}$$

$$\rho\big((a+bi)\cdot(c+di)\big) = \rho(ac-bd+(ac+bd)i) = \begin{pmatrix} ac-bd & -ad-bc \\ ad+bc & ac-bd \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c & -d \\ d & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ac-bd & -ad-bc \\ ad+bc & ac-bd \end{pmatrix}$$

$$\rho(1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

Injektiivisyys näkyy ensimmäisessä sarakkeessa ja jatkuvuus seuraa komponenttikuvausten $(a+bi) \mapsto a$ ja $\mapsto \pm b$ jatkuvuudesta.

$\rho(\mathbb{C})$ on suljettu:

Jos $\begin{pmatrix} a_k & -b_k \\ b_k & a_k \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$,

niin raja-arvon yksikäsitteisyyden nojalla $c_{11} = c_{22} = \lim a_k$ ja $-c_{12} = +c_{21} = \lim b_k$. $\square$

Lause 2.15

$$\psi : GL(n,\mathbb{C}) \to GL(2n,\mathbb{R})$$
$$[a_{rs}] \mapsto [\rho(a_{rs})]$$

on matriisiryhmän $GL(n,\mathbb{C})$ upotus.

Lemma 2.16 (blokkimatriisien tulo)

Jos A_{rs}, $r=1,\dots,n$, $s=1,\dots,m$ ja
B_{rs}, $r=1,\dots,m$, $s=1,\dots,p$ ovat

$\mathbb{K}$-kertoimisia matriiseja siten, että jokainen matriisitulo $A_{rk}B_{ks}$ on määritelty, niin

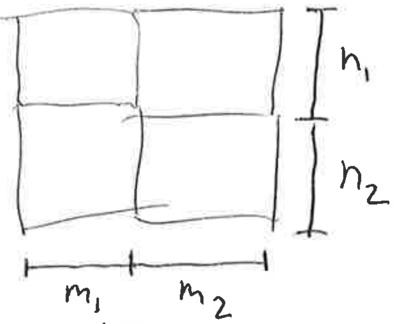
$$\begin{bmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{n1} & \cdots & A_{nm} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} B_{11} & \cdots & B_{1p} \\ \vdots & & \vdots \\ B_{m1} & \cdots & B_{mp} \end{bmatrix} = \left[\sum_{k=1}^{m} A_{rk}B_{ks}\right]_{\substack{r=1,\dots,n \\ s=1,\dots,p}}$$

Todistus

Todistetaan väite yksinkertaisuuden vuoksi kun blokkeja on 2×2,

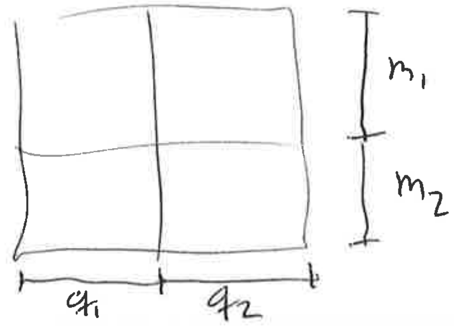
$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix}$$

Matriisitulojen yhteensopivuuden nojalla jos A:n blokit ovat

$A =$ 

, joillekin $n_1, n_2, m_1, m_2 \in \mathbb{N}$

niin B:n blokit ovat

$B =$ 

joillekin $q_1, q_2 \in \mathbb{N}$

Matriisin A alkioille saadaan indeksien vastaavuudet

	$1 \le s \le m_1$	$m_1 < s \le m_2+m_1$
$1 \le r \le n_1$	$a_{rs} = (A_{11})_{rs}$	$a_{rs} = (A_{12})_{r,s-m_1}$
$n_1 < r \le n_1+n_2$	$a_{rs} = (A_{21})_{r-n_1,s}$	$a_{rs} = (A_{22})_{r-n_1,s-m_1}$

ja matriisin B alkioille b_{rs} saadaan vastaava taulukko.

Matriisitulon AB r,s alkio on

$$(AB)_{rs} = \sum_{k=1}^{m_1+m_2} a_{rk} b_{ks} = \sum_{k=1}^{m_1} a_{rk} b_{ks} + \sum_{k=m_1+1}^{m_2+m_1} a_{rk} b_{ks}$$

Käydään läpi tapaus $r \le n_1$, $q_1 < s \le q_2$.

Muut tapaukset ovat vastaavia.

$$\sum_{k=1}^{m_1} a_{rk} b_{ks} \overset{1 \le k \le m_1}{=} \sum_{k=1}^{m_1} (A_{11})_{rk} (B_{12})_{k,s-q_1} \quad \text{ja}$$

$$\sum_{k=1+m_1}^{m_2+m_1} a_{rk} b_{ks} \overset{m_1 < k \le m_1+m_2}{=} \sum_{k=1+m_1}^{m_2+m_1} (A_{12})_{r,k-m_1} (B_{22})_{k-m_1,s-q_1}$$

$$= \sum_{k=1}^{m_2} (A_{12})_{r,k} (B_{22})_{k,s-q_1}$$

Siis

$$(AB)_{rs} = (A_{11}B_{12})_{r,s-q_1} + (A_{12}B_{22})_{r,s-q_1}. \qquad \square$$

$\mathbb{R}$-vektoriavaruutena $\mathbb{C}^n \simeq \mathbb{R}^{2n}$. Tämän vastaavuuden antaa

$$\Phi : \mathbb{C}^n \to \mathbb{R}^{2n}, \quad \Phi(a_1+b_1 i, \dots, a_n+b_n i) = (a_1, b_1, a_2, b_2, \dots, a_n, b_n)$$

Lemma 2.17

Kaikille $A \in M_n(\mathbb{C})$

$$\Phi \circ A = \Psi(A) \circ \Phi$$

$$\begin{tikzcd} \mathbb{C}^n \arrow[r, "\Phi"] \arrow[d, "A"'] & \mathbb{R}^{2n} \arrow[d, "\Psi(A)"] \\ \mathbb{C}^n \arrow[r, "\Phi"] & \mathbb{R}^{2n} \end{tikzcd}$$

Tod

HT

Lauseen 2.15 todistus

Pitää todistaa, että $\psi : GL(n,\mathbb{C}) \to GL(2n,\mathbb{R})$ on injektiivinen jatkuva homomorfismi, jonka kuvajoukko on suljettu.

Injektiivisyys jatkuvuus seuraavat suoraan kuvauksen $\rho : \mathbb{C} \to M_2(\mathbb{R})$ injektiivisyydestä ja jatkuvuudesta.

Homomorfismi:

$$\psi(A)\psi(B) \overset{\text{Lemma 2.16}}{=} \left[\sum_{k=1}^{n} \rho(a_{rk})\rho(b_{ks})\right]_{rs}$$

$$\overset{\text{Lause 2.14}}{=} \left[\rho\left(\sum_{k=1}^{n} a_{rk} b_{ks}\right)\right]_{rs}$$

$$= \left[\rho\left((AB)_{rs}\right)\right]_{rs} = \psi(AB)$$

Suljettu kuvajoukko:

Oletetaan että $A_k \in GL(n,\mathbb{C})$ on jono, jolle $\psi(A_k) \to B \in GL(2n,\mathbb{R})$.
Kirjoittaen B blokkimatriisina 2×2 blokeista B_{rs},

$$\rho((A_k)_{rs}) \to B_{rs}$$

Lauseen 2.14 nojalla $\rho(\mathbb{C})$ on suljettu ja ρ injektio, joten $(A_k)_{rs} \to a_{rs} \in \mathbb{C}$.
Näin ollen $A_k \to A = [a_{rs}]_{rs} \in M_n(\mathbb{C})$, joten riittää osoittaa että A on kääntyvä.

Lemman 2.17 nojalla lineaarikuvauksena

$$A \text{ kääntyvä} \iff \psi(A) = B \text{ kääntyvä},$$

ja oletuksen mukaan $B \in GL(2n,\mathbb{R})$. $\square$

Lause 2.18

(1) $GL(n,\mathbb{K}) \longrightarrow GL(n+m,\mathbb{K})$ on upotus

$$A \longmapsto \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & I_m \end{pmatrix}$$

(2) $GL(n,\mathbb{K}) \times GL(m,\mathbb{K}) \longrightarrow GL(n+m,\mathbb{K})$ on upotus

$$(A, B) \longmapsto \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}.$$

Todistus

(2) $\Rightarrow$ (1): $GL(n,\mathbb{K}) \to GL(n,\mathbb{K}) \times \{I_n\} < GL(n,\mathbb{K}) \times GL(n,\mathbb{K})$ on upotus.

(2): Injektiivisyys ja jatkuvuus seuraavat välittömästi.

Homomorfismi seuraa Lemmasta 2.16:

$$\begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & B_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A_2 & 0 \\ 0 & B_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 A_2 & 0 \\ 0 & B_1 B_2 \end{pmatrix}$$

Suljettu kuvajoukko:

$$\begin{pmatrix} A_k & 0 \\ 0 & B_k \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} C & D \\ E & F \end{pmatrix} \Rightarrow D = 0, E = 0$$

TO 11.1

8

Seuraus 2.19

Matriisiryhmien tulo on matriisiryhmä.

Todistus

Olk $G < GL(n, \mathbb{K}_1)$ ja $H < GL(m, \mathbb{K}_2)$ matriisiryhmiä. Dimensioiden n ja m ja kerroinkuntien $\mathbb{K}_1$ ja $\mathbb{K}_2$ ei tarvitse olla samat.

Lauseiden 2.15 ja 2.18(1) nojalla, voidaan upottaa

$$G \hookrightarrow GL(2n, \mathbb{R}) \quad \text{ja} \quad H \hookrightarrow GL(2m, \mathbb{R})$$

Jos $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, 2.18 $\Rightarrow$ $GL(n, \mathbb{R}) \hookrightarrow GL(2n, \mathbb{R})$

Jos $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, 2.15 $\Rightarrow$ $GL(n, \mathbb{C}) \hookrightarrow GL(2n, \mathbb{R})$

Edelleen lauseen 2.18 (2) nojalla

$$G \times H \hookrightarrow GL(2n, \mathbb{R}) \times GL(2n, \mathbb{R}) \hookrightarrow GL(2(n+m), \mathbb{R}),$$

joten $G \times H$ on isomorfinen $GL(2n+2n, \mathbb{R})$:n johonkin suljettuun aliryhmään.

Siis $G \times H$ on matriisiryhmä.