Erityisen ja yleisen lineaarisen ryhmän yhteys

TI 16.1

1

Lause 2.20

$$GL(n,\mathbb{K}) \simeq SL(n,\mathbb{K}) \rtimes GL(1,\mathbb{K}) \simeq SL(n,\mathbb{K}) \rtimes \mathbb{K}^*$$

Määr 2.21 (puolisuora tulo)

Ryhmä G on aliryhmien $N<G$ ja $H<G$ puolisuora tulo, merkitään $G = N \rtimes H$, jos

(i) $G = NH = \{nh : n \in N, h \in H\}$,

(ii) $N \lhd G$ ja

(iii) $N \cap H = \{e\}$

Huom

(1) Vertaa tuloryhmän $G = N \times H$ määritelmään. Tuloryhmässä laskutoimituksena on

$$(n_1, h_1) \cdot (n_2, h_2) = (n_1 n_2, h_1 h_2)$$

Joukot

$$\tilde{N} = N \times \{e_H\} < G \quad \text{ja} \quad \tilde{H} = \{e_N\} \times H < G$$

ovat ryhmän G aliryhmiä, joille

(i) $\tilde{N}\tilde{H} = \{(n, e_H) \cdot (e_N \cdot h) = (n,h) : n \in N, h \in H\} = G$

(ii) $\forall \tilde{n} = (n, e_H) \in \tilde{N}$ ja $g = (n_2, h) \in G$

$$g\tilde{n}g^{-1} = (n_2, h)(n, e_H)(n_2^{-1}, h^{-1}) = (n_2 n n_2^{-1}, e_H) \in \tilde{N}$$

$$\Longrightarrow \tilde{N} \lhd G$$

ja vastaavalla perustelulla $\tilde{H} \lhd G$.

(iii) $\tilde{N} \cap \tilde{H} = (N \times \{e_H\}) \cap (\{e_N\} \times H) = \{(e_N, e_H)\} = \{e_G\}$

Ti 16.1

2

(2) Edellä N ja H eivät ole ryhmän G aliryhmiä, mutta ovat isomorfisia aliryhmien $\tilde{N}$ ja $\hat{H}$

Puolisuorasta tulosta on myös abstraktimpi "ulkoinen" versio, missä N ja H ovat vain isomorfisia aliryhmien $\tilde{N} \triangleleft G$ ja $\tilde{H} < G$.

Tällöin vaaditaan kuitenkin jotain lisäinformaatiota siitä, miten ryhmän H ja N alkioita kerrotaan keskenään. (tarkkaan ottaen vaaditaan toiminto $H \curvearrowright N$)

Lauseen 2.20 todistus

Isomorfismi $\mathbb{K}^* \simeq GL(1, \mathbb{K})$ on vain alkioiden samaistus 1x1-matriisien kanssa. Yhdistäen tämä Lauseen 2.18 upotukseen

$$GL(1, \mathbb{K}) \hookrightarrow GL(n, \mathbb{K})$$

saadaan puolisuoran tulon molemmista ryhmistä "rehellisesti" ison ryhmän osajoukkoja.

(i) $$A \in GL(n,\mathbb{K}) \Rightarrow A = \underbrace{A \cdot \begin{bmatrix} 1/\det A & & 0 \\ & 1 & \\ 0 & & \ddots & \\ & & & 1 \end{bmatrix}}_{\in SL(n,\mathbb{K})} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} \det A & & 0 \\ & 1 & \\ 0 & & \ddots & \\ & & & 1 \end{bmatrix}}_{\in GL(1,\mathbb{K})}$$

(ii) $SL(n,\mathbb{K}) \triangleleft GL(n,\mathbb{K})$ Seurauksen 2,11 mukaan

(iii) Olk. $A \in SL(n,\mathbb{K}) \cap GL(1,\mathbb{K})$. Tällöin

$$A = \begin{bmatrix} a & & 0 \\ & 1 & \\ 0 & & \ddots & \\ & & & 1 \end{bmatrix} \text{ ja } \det A = 1 \Rightarrow a = 1 \Rightarrow A = I$$

$\square$

Lauseen 2.20 nojalla, topologisesti

$$GL(n, \mathbb{R}) \simeq SL(n, \mathbb{R}) \times (\mathbb{R} \setminus \{0\}) \quad \text{ja}$$
$$GL(n, \mathbb{C}) \simeq SL(n, \mathbb{C}) \times (\mathbb{C} \setminus \{0\})$$

Tämän takia esim aiemmin mainittu yhtenäisyystarkastelu voidaan rajoittaa ryhmään $SL(n,\mathbb{K})$.

3. (kompleksiset) sisätuloavaruudet

Määr 3.1

Vektoriavaruuden $\mathbb{K}^n$ sisätulo on kuvaus $\cdot : \mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}$ jolla on seuraavat ominaisuudet:

(i) konjugaattisymmetria:

$\forall x, y \in \mathbb{K}^n \quad x \cdot y = \overline{y \cdot x}$ (kompleksikonjugaatti $\mathbb{C} \to \mathbb{C} : \overline{(a+bi)} = a - bi$)

(ii) Lineaarisuus 2. argumentissa

$$\forall a \in \mathbb{K} \ \forall x, y, z \in \mathbb{K}^n : \quad x \cdot (ay) = a(x \cdot y) \text{ ja}$$
$$x \cdot (y+z) = x \cdot y + x \cdot z$$

(iii) Positiivisuus:

$\forall x \in \mathbb{K}^n : \quad x \cdot x \geq 0$ (huom $x \cdot x \in \mathbb{R}$ (i) nojalla, joten $x \cdot x \geq 0$ on järkevä ehto)

(iv) Definiittisyys:

$$\forall x \in \mathbb{K}^n : \quad x \cdot x = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

Huom

Sisätulo on lineaarinen 1. argumentissa vain tapauksessa $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.
Kun $\mathbb{K} = \mathbb{C}$,

$$(x+y) \cdot z = \overline{z \cdot (x+y)} = \overline{z \cdot x} + \overline{z \cdot y} = x \cdot z + y \cdot z, \text{ mutta}$$
$$(ax) \cdot z = \overline{z \cdot (ax)} = \overline{a(z \cdot x)} = \bar{a}(x \cdot z)$$

ja $\bar{a} = a \Leftrightarrow a \in \mathbb{R}$

Määr 3.2

Merkitään A^T matriisin A transpoosia ja A^* konjugaattitranspoosia

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \cdots & & \cdots \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} a_{11} & \vert \\ \vdots & \\ a_{1m} & \vert \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \cdots & & \cdots \end{bmatrix}^* = \begin{bmatrix} \overline{a_{11}} & \vert \\ \vdots & \\ \overline{a_{1m}} & \vert \end{bmatrix}$$

Matriisi A jolle $A^T = A$ on symmetrinen ja matriisi jolle $A^* = A$ on hermiittinen.
Reaalisille matriiseille $A \in GL(n, \mathbb{R})$ $\quad A^T = A^*$.

Konjugaattitransposin ominaisuuksia

Lause 3.3

(i) $A \mapsto A^*$ on jatkuva

(ii) $(A^*)^* = A \qquad \forall A \in M_n(\mathbb{K})$

(iii) $(tA)^* = \bar{t} A^* \qquad \forall t \in \mathbb{K},\ A \in M_n(\mathbb{K})$

(iv) $(AB)^* = B^* A^* \qquad \forall A, B \in M_n(\mathbb{K})$

(v) $\overline{\det A} = \det A^* \qquad \forall A \in M_n(\mathbb{K})$

(vi) $\overline{\operatorname{tr} A} = \operatorname{tr} A^* \qquad \forall A \in M_n(\mathbb{K})$ (matriisin $A = [a_{rs}]_{rs}$ jälki on $\operatorname{tr} A = \sum_{k=1}^{n} a_{kk}$)

Tod

(i) Komponenttikuvausten jatkuvuuden tarkastelussa transpoosi ei näe lainkaan ja kompleksikonjugaatti on jatkuva.

(ii) $(A^*)^* = ([a_{rs}]_{rs}{}^*)^* = ([\overline{a_{sr}}]_{rs})^* = [\overline{\overline{a_{rs}}}]_{rs} = [a_{rs}]_{rs} = A$

(iii) $(tA)^* = [ta_{rs}]_{rs}^* = [\bar{t}\, \overline{a_{sr}}]_{rs} = \bar{t}\, [\overline{a_{sr}}]_{rs} = \bar{t} A^*$

(iv) $(AB)^* = [\sum_k a_{rk} b_{ks}]_{rs}^* = [\sum_k \overline{a_{sk}}\, \overline{b_{kr}}]_{rs}$

$B^* A^* = [\overline{b_{sr}}]_{rs} [\overline{a_{sr}}]_{rs} = [\sum_k \overline{b_{kr}}\, \overline{a_{sk}}]$

(v) $\det A^* = \det [\overline{a_{sr}}]_{rs} = \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^{\sigma} \prod_{k=1}^{n} \overline{a_{\sigma(k),k}}$

$= \overline{\left(\sum_{\sigma \in S_n} (-1)^{\sigma} \prod_{k=1}^{n} a_{\sigma(k),k} \right)} = \overline{\left(\sum_{\sigma \in S_n} (-1)^{\sigma} \prod_{k=1}^{n} a_{k,\sigma^{-1}(k)} \right)} = \overline{\left(\sum_{\sigma \in S_n} (-1)^{\sigma} \prod_{k=1}^{n} a_{k\sigma(k)} \right)}$

$= \overline{\det A}$

(vi) $\operatorname{tr} A^* = \sum_{k=1}^{n} \overline{a_{kk}} = \overline{\sum_{k=1}^{n} a_{kk}} = \overline{\operatorname{tr} A}$ $\square$

Lemma 3.4 / Määr 3.4

Olk $x, y \in \mathbb{K}^n$. Samaistaen jälleen vektorit matriiseiksi $M_{n\times 1}(\mathbb{K})$,

$$x \cdot y = x^* y = [\overline{x_1} \ \cdots \ \overline{x_n}] \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

antaa $\mathbb{K}^n$:n standardin sisätulon

Tod

Tarkistetaan, että x^*y määrittelee sisätulon.

(i) $x^*y = \overline{\sum_{k=1} \overline{x_k} y_k} = \overline{\sum_{k=1}^n x_k \overline{y_k}} = \overline{y^*x}$

(ii) $x \cdot ay = x^*(ay) = a(x^*y)$ ja

$x \cdot (y+z) = x^*(y+z) = x^*y + x^*z$

matriisitulon lineaarisuuden nojalla.

(iii) $x^*x = \sum_{k=1}^n \overline{x_k} x_k = \sum_{k=1}^n |x_k|^2 \geq 0$

(iv) $x^*x = 0 \iff \sum_{k=1}^n |x_k|^2 = 0 \iff x_k = 0 \ \forall k \iff x = 0$

Itse asiassa kaikki $\mathbb{K}^n$:n sisätulot ovat lähes muotoa x^*y.

Olkoon $f: \mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}$ sisätulo. Määritellään matriisi

$$A = [f(e_r, e_s)]_{rs} \in M_n(\mathbb{K})$$

Lineaarisuusehdon (ii) nojalla

$$f(x,y) = f\left(\sum_{j=1}^n x_j e_j, \sum_{k=1}^n y_k e_k\right) = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \overline{x_j} f(e_j, e_k) y_k$$

$$= \sum_{j=1}^n \overline{x_j} \sum_{k=1}^n f(e_j, e_k) y_k = x^*Ay$$

Ehdot (i), (iii) ja (iv) kertovat matriisin A ominaisuuksista.

(i) $\Rightarrow f(x,y) = \overline{f(y,x)} \Rightarrow x^*Ay = (y^*Ax)^* = x^*A^*y \quad \forall x,y \in \mathbb{K}^n$

Huomaa, että kantavektoreille $e_r^* B e_s = B_{rs} \quad \forall B \in M_n(\mathbb{K})$,

joten $e_r^* A e_s = e_r^* A^* e_s \Rightarrow A_{rs} = (A^*)_{rs} \Rightarrow A = A^*$

eli A on hermiittinen.

(iii) & (iv) $\Rightarrow x^*Ax = f(x,x) > 0 \quad \forall x \neq 0 \Rightarrow$ A on positiividefiniitti

Sisätuloavaruuden symmetriat

Ti 16.1

6

Standardille sisätulolle $\forall A \in M_n(\mathbb{K})$ ja $x, y \in \mathbb{K}^n$

$$Ax \cdot Ay = (Ax)^* Ay = x^* A^* A y = x \cdot (A^* A y)$$

Määr 3.5

Unitaariryhmä on $U(n) = \{A \in GL(n, \mathbb{C}) : A^* A = I\}$ ja
ortogonaaliryhmä on $O(n) = \{A \in GL(n, \mathbb{R}) : A^T A = I\}$

Lause 3.6

$O(n)$ ja $U(n)$ ovat matriisiryhmiä

Tod

Käsitellään unitaariryhmää. Ortogonaaliryhmälle todistus on lähes identtinen.

$U(n) < GL(n, \mathbb{C})$:

(i) $I \in U(n)$: $\quad I^* I = I I = I$

(ii) $A \in U(n) \Rightarrow A^{-1} \in U(n)$: Käänteismatriisin yksikäsitteisyyden nojalla jos $A \in U(n)$, $A^{-1} = A^*$, joten $(A^{-1})^* A^{-1} = (A^*)^* A^* = AA^* = I$

(iii) $A, B \in U(n) \Rightarrow AB \in U(n)$:

$$(AB)^* AB = B^* A^* AB = B^* B = I$$

$U(n)$ on suljettu:

Tämä seuraa operaation $f: GL(n, \mathbb{C}) \to GL(n, \mathbb{C})$, $f(A) = A^* A$ jatkuvuudesta. Nimittäin $U(n) = f^{-1}(\{I\})$. $\square$

Ortogonaali ja unitaariryhmät ovat reaalisten ja kompleksisten sisätuloavaruuksien symmetriaryhmät:

Lause 3.7

Olkoon $A \in GL(n, \mathbb{K})$. Seuraavat ovat ekvivalentteja

(i) $A \in \begin{cases} O(n) & \text{jos } \mathbb{K} = \mathbb{R} \\ U(n) & \text{jos } \mathbb{K} = \mathbb{C} \end{cases}$

(ii) $\forall x, y \in \mathbb{K}^n: \quad Ax \cdot Ay = x \cdot y$

(iii) $\forall x, y \in \mathbb{K}^n: \quad \|Ax - Ay\| = \|x - y\|$

Tod

(i) $\Rightarrow$ (ii): $Ax \cdot Ay = (Ax)^* Ay = x^* A^* A y \overset{A^*A = I}{=} x^* y = x \cdot y$

(ii) $\Rightarrow$ (iii): $\|Ax - Ay\|^2 = \|A(x-y)\|^2 = A(x-y) \cdot A(x-y) = (x-y) \cdot (x-y) = \|x-y\|^2$

(iii) $\Rightarrow$ (i): $\forall x \in \mathbb{K}^n: \quad x^* A^* A x = \|Ax\|^2 = \|x\|^2 = x^* x$

Soveltamalla tätä huomataan vertaamalla yhtälöitä

$$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2x \cdot y \quad \text{ja}$$

$$\|Ax + Ay\|^2 = \|Ax\|^2 + \|Ay\|^2 + 2Ax \cdot Ay$$

että on oltava $Ax \cdot Ay = x \cdot y$, eli $x^* A^* A y = x^* y$.

Valinnalla $x = e_r$ ja $y = e_s$,

$$e_r^* A^* A e_s = e_r^* e_s \Rightarrow (A^*A)_{rs} = \begin{cases} 1, & r = s \\ 0, & r \neq s \end{cases} \Rightarrow A^* A = I \qquad \square$$

Lause 3.8

Olkoot $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{K}^n \simeq M_{n \times 1}(\mathbb{K})$ lineaarisesti riippumattomia vektoreita ja $A = [x_1 \ldots x_n] \in GL(n, \mathbb{K})$ näistä muodostettu matriisi.

Tällöin

$$A \in \begin{cases} O(n), & \text{jos } \mathbb{K} = \mathbb{R} \\ U(n), & \text{jos } \mathbb{K} = \mathbb{C} \end{cases}$$

$\Longleftrightarrow$ vektorit $x_1, \ldots, x_n$ muodostavat ortonormaalin kannan standardin sisätulon suhteen

Tod
HT