$\|Ax - Ay\| = \|x - y\| \Rightarrow Ax \cdot Ay = x \cdot y$

$(x+iy)\cdot(x+iy) \rightsquigarrow iAx\cdot\overline{Ay} + i\overline{Ax}\cdot Ay = ix\cdot\overline{y} + i\overline{x}\cdot y$

TO 18.1

1

Seuraus 3.9

$O(n)$ ja $U(n)$ ovat kompakteja.

Määr 3.10

$X \subset \mathbb{K}^m$ on <u>kompakti</u> jos se on suljettu ja rajoitettu.

Seurauksen 3.9 todistus

Koska $O(n)$ ja $U(n)$ ovat matriisiryhmiä, ne ovat suljettuja, joten riittää osoittaa että ne ovat rajoitettuja.

Olkoon $A \in O(n)$ tai $A \in U(n)$.

Lauseen 3.8 nojalla matriisin A sarakkeet muodostavat ortonormaalin kannan, joten

$$|A_{rs}|^2 \leq \sum_{k=1}^{n} |A_{ks}|^2 = 1 .$$

$\Rightarrow$ jokaisen $O(n)$:n tai $U(n)$:n matriisin jokainen alkio on normiltaan alle 1 $\Rightarrow$ $O(n)$ ja $U(n)$ ovat rajoitettuja $\square$

Lauseen 2.20 hajoitelmasta saadaan vastaavat hajoitelmat ortogonaali- ja unitaariryhmille:

$$\begin{aligned} GL(n,\mathbb{K}) &= SL(n,\mathbb{K}) \rtimes GL(1,\mathbb{K}) \\ O(n) &= SO(n) \rtimes O(1) \\ U(n) &= SU(n) \rtimes U(1) \end{aligned}$$

(itse asiassa $O(n) = SO(n) \times O(1)$) upotuksella $\{\pm 1\} \hookrightarrow \{\pm I\}$ kun n pariton

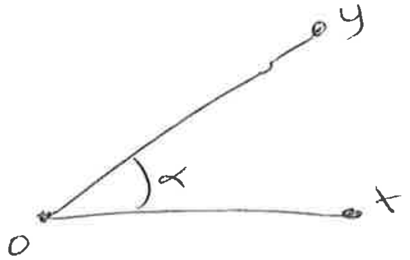
Määr 3.11

<u>Erityinen ortogonaalinen ryhmä</u> on $SO(n) = \{A \in O(n) : \det A = 1\}$

<u>Erityinen unitaarinen ryhmä</u> on $SU(n) = \{A \in U(n) : \det A = 1\}$

Kiertoryhmät SO(n)

Ortogonaaliryhmä $O(n)$ koostuu Lauseen 3.7 mukaan täsmälleeen kaikista lineaarikuvauksista $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ jotka säilyttävät sisätulon, eli säilyttävät kulmien suuruudet ja etäisyydet pisteiden välillä.



$$\cos \alpha = \frac{x \cdot y}{\|x\| \cdot \|y\|}$$

Tällaisia kuvauksia $\mathbb{R}^n$:issä ovat vain kierrot ja peilaukset ja niiden yhdisteet.

$SO(n) \triangleleft O(n)$ sisältää kaikki kierrot. Tasossa $\mathbb{R}^2$ tämä on helppo hahmottaa.

Lause 3.12

Topologisina ryhminä $SO(2) \simeq S^1 \subset \mathbb{C}$

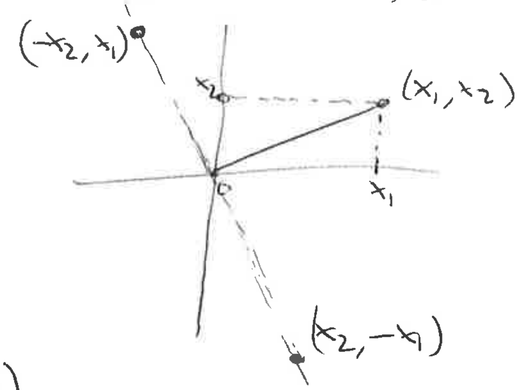
Tod

Olkoon $A \in SO(2)$ ja olkoot $x, y \in \mathbb{R}^2$ sen sarakkeet.

Lauseen 3.8 nojalla $\{x, y\} \subset \mathbb{R}^2$ on ortonormaali kanta, joten

$$y = (y_1, y_2) = (\mp x_2, \pm x_1)$$

$$A = \begin{bmatrix} x_1 & \mp x_2 \\ x_2 & \pm x_1 \end{bmatrix}$$



koska

$$1 = \det A = \pm(x_1^2 + x_2^2) = \pm 1,$$

$$A = \begin{bmatrix} x_1 & -x_2 \\ x_2 & x_1 \end{bmatrix} = \rho(x_1 + x_2 i)$$

Toisin sanoen rajoittamalla kuvaus $\rho : \mathbb{C} \to M_2(\mathbb{R})$ joukkoon

$$S^1 = \{a + bi \in \mathbb{C} : a^2 + b^2 = 1\}$$

saadaan jatkuva ryhmäisomorfismi $\rho : S^1 \to SO(2)$.

Käänteiskuvaus $\rho^{-1} : SO(2) \to S^1$ taas on rajoittuma kuvauksesta

$$M_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{C} : \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \mapsto a + bi$$

joten ρ^{-1} on jatkuva. Näin ollen ρ on topologisten ryhmien isomorfismi. □

TO 18.1

3

Lause 3.13 (Eulerin kiertolause)

Jokainen kierto $A \in SO(3)$ on kierto jonkin akselin suhteen.

Tod

Väite seuraa jos osoitetaan, että $Ax = x$ jollekin $x \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$, sillä tällöin lineaarisuuden perusteella A pitää x:n suuntaisen suoran paikallaan, joten sen on oltava kierto tämän akselin suhteen.

$Ax = x \Leftrightarrow x$ on ominaisvektori ominaisarvolle 1, joten riittää tarkistaa, että 1 todella on ominaisarvo.

$$
\begin{aligned}
\det(A-I) &\overset{\det A = 1}{=} \det A \cdot \det(A-I) \\
&\overset{\det B^T = \det B}{=} \det A \cdot \det(A^T - I) \\
&= \det(AA^T - A) \\
&= \det(I - A) \\
&= (-1)^3 \det(A - I) = -\det(A-I)
\end{aligned}
$$

$\Rightarrow \det(A-I) = 0 \Rightarrow 1$ on ominaisarvo $\square$

Kvaterniot

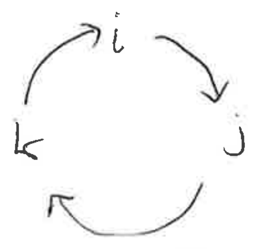
Eulerin kiertolause $\Rightarrow$ jokainen kierto sisältää informaatiota ainoastaan kiertoakselin $(x \in S^2 \subset \mathbb{R}^3)$ ja kiertokulman $(\theta \in S^1)$ verran.

Kolmen parametrin sijaan matriisiesityksessä $SO(3)$:lla on yhdeksän parametria ja kokoelma riippuvuuksia ehdoista $AA^T = I$ ja $\det A = 1$.

Vastaavasti tason kiertojen tapauksessa matriisiesityksessä $SO(2)$ on 4 parametria yhden (kiertokulma) sijaan.
Yhden parametrin esitys isomorfismin $S^1 \simeq SO(2)$ kautta tuli kuitenkin näppärästi kompleksilukujen avulla.

Kvaterniot (Hamilton 1843) antavat vastaavan tavan parametrisoida kierrot $\mathbb{R}^3$:ssa. (ja myös $\mathbb{R}^4$:ssa)

Kvaternioalgebra on reaalinen 4-ulotteinen vektoriavaruus
$$\mathbb{H} = \{a + bi + cj + dk \;:\; a, b, c, d \in \mathbb{R}\}$$
varustettuna kertolaskulla, jolle
$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$$
Kertolasku esitetään usein diagrammina



joka tulkitaan siten, että kahden kaarion alkion tulo on kolmas ja merkki on +, jos ensimmäisestä osoittaa nuoli toiseen, eiin
$$ki = j \qquad \text{tai} \qquad jk = i \quad \text{tai} \quad ji = -k$$

Kvaterniot tällä kertolaskulla muodostavat ns. <u>vinokunnan</u>
(kaikki kunnan muut oletukset paitsi kertolaskun kommutatiivisuus)

Vastaavasti kuin kompleksiluvuilla on upotus $\mathbb{C} \to M_2(\mathbb{R})$, kvaternioilla on upotus $\mathbb{H} \to M_2(\mathbb{C})$.

Tämä saadaan matriiseista

$$1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad i = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad j = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix}, \quad k = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$$

Määr 3.14 (Cayley 1858)

Kvaternioalgebra on reaalinen 4-ulotteinen avaruus

$$\mathbb{H} = \operatorname{span}_{\mathbb{R}}(1, i, j, k) = \left\{ \begin{bmatrix} a+id & -b-ic \\ b-ic & a-id \end{bmatrix} : a,b,c,d \in \mathbb{R} \right\} \subset M_2(\mathbb{C})$$

varustettuna matriisien kertolaskulla.

Tarkistetaan, että kertolasku on mielekäs.

Merkitään $x = a+id$ ja $y = b-ic$, jolloin

$$\begin{pmatrix} a+id & -b-ic \\ b-ic & a-id \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & -\bar{y} \\ y & \bar{x} \end{pmatrix}$$

Kahden tällaisen alkion tulo on

$$\begin{pmatrix} x & -\bar{y} \\ y & \bar{x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z & -\bar{w} \\ w & \bar{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xz - y\bar{w} & -x\bar{w} - \overline{yz} \\ yz + \bar{x}w & -y\bar{w} + \overline{xz} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} xz - \bar{y}w & -\overline{(yz + \bar{x}w)} \\ yz + \bar{x}w & \overline{xz - \bar{y}w} \end{pmatrix}$$

joka on edelleen samaa muotoa.

Määr 3.15

Kvaternion $q = a+bi+cj+dk$ reaaliosa on $\operatorname{Re}(q) = a$ ja imaginääriosa on $\operatorname{im}(q) = bi+cj+dk$.

Kvaternio jolle $\operatorname{im}(q) = 0$ on reaalinen ja kvaternio jolle $\operatorname{re}(q) = 0$ on imaginäärinen.

Kvaterniokonjugaatti on $\bar{q} = \operatorname{re}(q) - \operatorname{im}(q)$

Imaginääristen kvaternioiden joukkoa tullaan merkitsemään $\mathbb{R}i + \mathbb{R}j + \mathbb{R}k$

Kvaternioille käytetään $\mathbb{R}^4$:sta periytyvää normia

$$|a+bi+cj+dk| = \sqrt{a^2+b^2+c^2+d^2}$$

Tämä voidaan esittää matriisiesityksen kautta

$$|q|^2 = \det q = \det\begin{pmatrix} a+di & -b-ci \\ b-ci & a-di \end{pmatrix}$$

tai kvaterniokonjugaatin kautta

$$|q|^2 = q \cdot \bar{q}.$$

Hyödyllisiä perusominaisuuksia:

(1) $\forall r \in \mathbb{R} \subset \mathbb{H}$ ja $q \in \mathbb{H}$ $\quad qr = rq$

(2) $\forall q \in \mathbb{H} \setminus \{0\}$: $\quad q^{-1} = \dfrac{\bar{q}}{|q|^2}.$

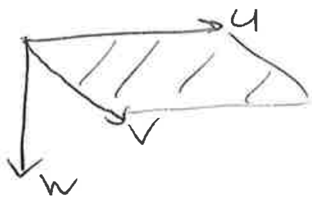
Imaginääristen kvaternioiden tulo voidaan kirjoittaa $\mathbb{R}^3$:n sisätulon ja ristitulon avulla.

Määr 3.16

Ristitulo $\mathbb{R}^3 \simeq \mathbb{R}i + \mathbb{R}j + \mathbb{R}k$ issa on muodollinen determinantti

$$u \times v = \det \begin{pmatrix} i & j & k \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{pmatrix} = (u_2v_3 - u_3v_2)i + (u_3v_1 - u_1v_3)j + (u_1v_2 - u_2v_1)k$$

Geometrisesti ristitulo antaa orientoidulle tasolle (u,v) kohtisuoran vektorin $w = u \times v$, jolle $\|w\|$ on vektorien u ja v määräämän suunnikkaan pinta-ala. Erityisesti $u \times v = -v \times u$.



Lemma 3.17

Kaikille $u, v \in \mathbb{R}i + \mathbb{R}j + \mathbb{R}k$, kvaterniotulo on

$$uv = -u \cdot v + u \times v$$

Tod

Lasku. HT.

Huom Imaginäärisille $u, v \in \mathbb{H}$

(1) $uv \in \mathbb{R}i + \mathbb{R}j + \mathbb{R}k \iff u \cdot v = 0$ eli u ja v ovat ortogonaaliset

(2) $uv \in \mathbb{R} \iff u \times v = 0$ eli u ja v ovat lineaarisesti riippuvia

(3) Jos $u \cdot v = 0$, niin $uv = u \times v = -v \times u = -vu$.

(4) Kvaternioalgebrassa -1:llä on äärettömästi neliöjuuria!
$\forall u \in \mathbb{R}i + \mathbb{R}j + \mathbb{R}k$ joille $|u| = 1$, $u^2 = -u \cdot u + u \times u = -|u|^2 = -1$.

Kvaterniot ja kierrot

Yksikkökvaternio $q \in \mathbb{H}$ voidaan aina kirjoittaa muodossa

$$q = \cos\theta + u\sin\theta,$$

missä $\theta \in \mathbb{R}$ ja $u \in \mathbb{R}i + \mathbb{R}j + \mathbb{R}k$ on yksikkökvaternio. Tässä siis

$$\begin{cases} \cos\theta = \mathrm{Re}(q) \\ \sin\theta = |\mathrm{Im}(q)| \end{cases} \quad \text{ja} \quad u = \frac{\mathrm{Im}(q)}{|\mathrm{Im}(q)|}$$

Tarkastellaan yksikkökvaternion q määräämää konjugaatiokuvausta

$$A_q : \mathbb{H} \to \mathbb{H} \qquad A_q(x) = qxq^{-1}.$$

Reaalisten kvaternioiden kommutatiivisuuden nojalla $A_q(r) = r \ \forall r \in \mathbb{R}$.

Toisaalta, koska

$$|A_q(x)| = |qxq^{-1}| = |q|\cdot|x|\cdot|q^{-1}| = |q|\cdot|x|\cdot\frac{|\bar{q}|}{|q|^2} = |x|,$$

kuvaus A_q on Lauseen 3.7 nojalla ortogonaalinen, eli $A_q \in O(4)$.

Näin ollen A_q kuvaa $\mathbb{R}$:n ortogonaalikomplementin

$$A_q(\mathbb{R}^\perp) = A_q(\mathbb{R})^\perp, \text{ eli } A_q(\mathbb{R}i + \mathbb{R}j + \mathbb{R}k) = \mathbb{R}i + \mathbb{R}j + \mathbb{R}k.$$

Rajoittamalla imaginäärisiin kvaternioihin saadaan haluttu kuvaus

$$R_q : \mathbb{R}i + \mathbb{R}j + \mathbb{R}k \to \mathbb{R}i + \mathbb{R}j + \mathbb{R}k, \quad R_q(x) = qxq^{-1}$$

Lause 3.18

Olkoon $q = \cos\theta + u\sin\theta \in \mathbb{H}$, $|u| = 1$.

Tällöin $R_q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ on kulman 2θ kierto akselin u suhteen.

Olkoon $v \in \mathbb{R}i + \mathbb{R}j + \mathbb{R}k$, $|v|=1$, $u \cdot v = 0$ ja $w = u \times v$, jolloin $\{u, v, w\}$ on avaruuden $\mathbb{R}i + \mathbb{R}j + \mathbb{R}k$ ortonormaali kanta.

TO 18.11

9

Lemman 3.17 nojalla w on kvaternitulona $w = uv$.

Tarkastellaan kuvausta R_q kannassa $\{u, v, w\}$.

Kvaternion $q = \cos\theta + u\sin\theta$ käänteisalkio on $q^{-1} = \cos\theta - u\sin\theta$, joten $\forall x \in \mathbb{R}i + \mathbb{R}j + \mathbb{R}k$

$$
\begin{aligned}
R_q(x) &= (\cos\theta + u\sin\theta)x(\cos\theta - u\sin\theta) \\
&= (x\cos\theta + ux\sin\theta)(\cos\theta - u\sin\theta) \\
&= x\cos^2\theta - xu\sin\theta\cos\theta + ux\sin\theta\cos\theta - uxu\sin^2\theta
\end{aligned}
$$

Tapauksessa $x = u$, $-xu = -u^2 = 1$, $ux = u^2 = -1$, $-uxu = -u^3 = u$, eli

$$R_q(u) = u(\cos^2\theta + \sin^2\theta) = u,$$

eli R_q pitää u-akselin paikallaan.

Tapauksessa $x = v$, $-xu = -vu \underset{\uparrow\, u \cdot v = 0}{=} uv = w$, $ux = uv = w$, $-uxu = -uvu \underset{\uparrow\, u \cdot v = 0}{=} vu^2 = -v$, eli

$$
\begin{aligned}
R_q(v) &= v(\cos^2\theta - \sin^2\theta) + 2w\sin\theta\cos\theta \\
&= v\cos 2\theta + w\sin 2\theta
\end{aligned}
$$

Tapauksessa $x = w$, $-xu = -wu = -uvu = -v$,
$ux = uw = uuv = -v$,
$-uxu = -uwu = -uuvu = vu = -uv = -w$, eli

$$
\begin{aligned}
R_q(w) &= w(\cos^2\theta - \sin^2\theta) - 2v\sin\theta\cos\theta \\
&= v(-\sin 2\theta) + w\cos 2\theta
\end{aligned}
$$

Siis

$$R_q(au + bv + cw) = au + (b\cos 2\theta - c\sin 2\theta)v + (b\sin 2\theta + c\cos 2\theta)w$$

eli kuvausta R_q vastaa tässä kannassa matriisitulo

$$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \longmapsto \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos 2\theta & -\sin 2\theta \\ 0 & \sin 2\theta & \cos 2\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix},$$

joka on (v, w)-tason eli u-akselin suhteen kulman 2θ kierto $\square$