Lause 3.19

Ti 23.1

1

Yksikkökvaternioiden topologinen ryhmä ja $SU(2)$ ovat isomorfiset.

(Itse asiassa tällä kurssilla käytetyllä kvaternioiden määritelmällä
$\{q \in \mathbb{H} : |q|=1\} = SU(2)$)

Tod

Kvaterniotulon mielekkyyttä tarkastaessa käytettiin kompleksista kirjoitusasua

$$q = \begin{bmatrix} a+id & -b-ic \\ b-ic & a-id \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & -\bar{y} \\ y & \bar{x} \end{bmatrix},$$

missä $a,b,c,d \in \mathbb{R}$ korvataan kompleksisilla $x, y \in \mathbb{C}$.

Käytetään Lauseen 3.8 karakterisaatiota

$q \in SU(2) \iff$ sarakkeet $(x,y) \in \mathbb{C}^2$ ja $(-\bar{y}, \bar{x}) \in \mathbb{C}^2$ ovat ortonormaalit. ja $\det q = 1$.

Sarakkeet ovat aina ortonormaalit: $\forall x, y \in \mathbb{C}$

$$(x,y) \cdot (-\bar{y}, \bar{x}) = [\bar{x} \ \bar{y}] \begin{bmatrix} -\bar{y} \\ \bar{x} \end{bmatrix} = -\bar{x}\bar{y} + \bar{y}\bar{x} = 0$$

Lisäksi

$\|(x,y)\|^2 = |x|^2 + |y|^2$ ja

$\|(-\bar{y}, \bar{x})\|^2 = |-\bar{y}|^2 + |\bar{x}|^2 = |x|^2 + |y|^2$ ja

$|q| = x\bar{x} + y\bar{y} = |x|^2 + |y|^2,$

joten, sarakkeet ovat yksikkönormisia $\iff |q|=1$ $\square$

koska $\det q = |q|^2$, saadaan lauseen väite.

## Lause 3.20



Kuvaus $R: SU(2) \to SO(3)$, $R(q) = R_q$
on jatkuva surjektiivinen homomorfismi, ja
$R(q_1) = R(q_2) \Rightarrow q_1 = \pm q_2$.

### Tod

Jatkuvuus: Olkoon $q_k \to q$ suppeneva jono ~~yksikkö~~ kvaternioita (eli $SU(2)$:n alkioita). Tällöin kaikille $x \in \mathbb{R}^3 \cong \mathbb{R}i + \mathbb{R}j + \mathbb{R}k$

$$R_{q_k}(x) = q_k x q_k^{-1} \longrightarrow q x q^{-1} = R_q(x)$$

matriisitulon ja käänteiskuvauksen jatkuvuuden nojalla.
Näin ollen $R_{q_k} \to R_q$.

Surjektiivisuus: Eulerin kiertolauseen nojalla jokainen $A \in SO(3)$ on jonkin kulman $\theta$ kierto jonkin akselin $u$ suhteen, ja kvaternio $\cos\frac{\theta}{2} + u\sin\frac{\theta}{2} \in SU(2)$ antaa tällaisen kierron.

Homomorfismi: konjugaatiokuvaus on homomorfismi: $\forall x \in \mathbb{R}^3$

$$R_{q_1} \circ R_{q_2}(x) = R_{q_1}(q_2 x q_2^{-1}) = q_1 q_2 x q_2^{-1} q_1^{-1} = (q_1 q_2) x (q_1 q_2)^{-1} = R_{q_1 q_2}(x)$$

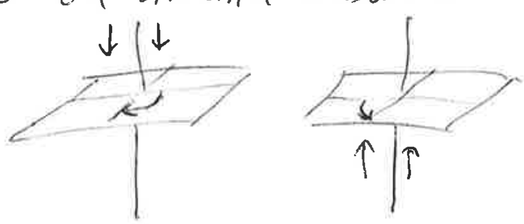
$R(q_1) = R(q_2) \Rightarrow q_1 = \pm q_2$:

Jos $R(q_1) = R(q_2)$, kierroilla on sama akseli. Esityksessä

$$q_1 = \cos\theta_1 + u_1 \sin\theta_1 \quad , \quad q_2 = \cos\theta_2 + u_2 \sin\theta_2$$

(joka on yksikäsitteinen) akselin määrää $\operatorname{span}_{\mathbb{R}}(u)$, joten koska $|u_1| = 1 = |u_2|$, on oltava $u_1 = \pm u_2$.

Tapauksessa $u_1 = -u_2$, ehto $R(q_1) = R(q_2)$ tarkoittaa että $\theta_1 = \pi - \theta_2$
(ylhäältä päin katsottuna myötäpäivään kierto on alhaalta katsottuna vastapäivään kierto)



Toisin sanoen, joko $q_1 = q_2$ tai

$$q_1 = \cos(\pi - \theta_2) - u_2 \sin(\pi - \theta_2) =$$
$$= -\cos\theta_2 - u_2 \sin\theta_2 = -q_2$$

Lause 3.20 voidaan tulkita myös väitteenä

$$SO(3) \simeq SU(2)/\{\pm I\}$$

($SU(2)$ on $SO(3)$:n kaksinkertainen peite) TI 23.1 3

## Kiertoryhmien yhtenäisyys

### Määr 3.21

Joukko $X \subset \mathbb{K}^n$ on <u>polkuyhtenäinen</u> jos $\forall x, y \in X$ on olemassa polku $\gamma : [0,1] \to X$ jolle $\gamma(0) = x$, $\gamma(1) = y$. Tällaista polkua merkitään myös $x \rightsquigarrow y$.

### Lause 3.22

$SO(n)$ on polkuyhtenäinen

### Tod

Todistetaan väite induktiolla dimension $n$ yli.

Tapauksessa $n=1$ $SO(1) = \{I\}$ ei ole mitään tehtävää.

Tapaus $n=2$ seuraa Lauseesta 3.12: $SO(2) \simeq S^1$ ja ympyrä $S^1$ on polkuyhtenäinen.

Oletetaan, että $SO(n-1)$ tunnetaan polkuyhtenäiseksi ja osoitetaan sama $SO(n)$:lle.

Olkoon $A \in SO(n)$. Kiinnitetään mielivaltainen $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ (esim $x = e_1$). Oletetaan ensin että $Ax = x$. Tällöin demo 2.7 nojalla $A \in \operatorname{stab}(x) \simeq SO(n-1)$, jolloin induktio-oletuksen nojalla on olemassa polku $I$:stä $A$:han.

Jos taas $Ax \neq x$, voidaan määritellä tason $(x, Ax)$ kierto $B$ jolle $Ax \mapsto x$, eli jolle $BAx = x$. Tällöin edellinen argumentti antaa polun $I \rightsquigarrow BA$ $SO(n)$:ssä.

Toisaalta tason $(x, Ax)$ kierrot määrittävät aliryhmän $H < SO(n)$, $H \simeq SO(2)$ joten on olemassa polku $\gamma : I \rightsquigarrow B$ $H$:ssa, eli $\gamma : [0,1] \to H$, $\gamma(0) = I$, $\gamma(1) = B$.

Tällöin $B(t) = \gamma(t)A$ on polku $A \rightsquigarrow BA$ $SO(n)$:ssä. $\square$

## Lause 3.23

$SU(n)$ on polkuyhtenäinen

**Tod**

HT. Argumentti on vastaava kuin Lauseessa 3.22.

## Seuraus 3.24

$U(n)$ ja $GL(n, \mathbb{C})$ ovat polkuyhtenäisiä.

**Tod**

$U(n)$:n polkuyhtenäisyys seuraa hajotelmasta $U(n) = SU(n) \rtimes U(1) \cong SU(n) \rtimes (S^1)$

Näin ollen riittää osoittaa että jokainen $A \in GL(n, \mathbb{C})$ voidaan yhdistää polulla $GL(n, \mathbb{C})$:issä johonkin $B \in U(n)$.
Tämä voidaan osoittaa suorittamalla 'ortonormalisaatio polkuja pitkin'.

Olkoot $x_1, \ldots, x_n$ matriisin $A \in GL(n, \mathbb{C})$ sarakkeet, jolloin $x_1, \ldots, x_n$ on $\mathbb{C}^n$:in kanta. Kannan ortonormalisaatiossa on kaksi operaatiota

(1) Normalisointi : $x \mapsto \dfrac{x}{\|x\|}$ ja

(2) Ortogonalisointi : $x \mapsto x - (y \cdot x)\, y$
(y:n suhteen)

Näiden jatkuvat versiot saadaan poluilla

$$\alpha_x : [0,1] \to \mathbb{C}^n \qquad \alpha_x(t) = \frac{x}{1 + (\|x\| - 1)\, t} \qquad \text{ja}$$

$$\beta_{xy} : [0,1] \to \mathbb{C}^n \qquad \beta_{xy}(t) = x - t\,(y \cdot x)\, y$$

Näille poluille

$$\alpha_x(0) = \frac{x}{1} = x, \qquad \alpha_x(1) = \frac{x}{1 + (\|x\| - 1)} = \frac{x}{\|x\|}$$

$$\beta_{xy}(0) = x \qquad \beta_{xy}(1) = x - (y \cdot x)\, y$$

Polku matriisista $A = [x_1 \; \cdots \; x_n]$ ortonormalisoituun matriisiin $B = [\hat{x}_1 \; \hat{x}_2 \; \cdots \; \hat{x}_n] \in U(n)$ saadaan käyttämällä edeltäviä polkuja sarakkeissa.

T1 23.1

5

Esim ensimmäisen sarakkeen normalisointi:

$$\gamma_1 : [0,1] \to GL(n, \mathbb{C}) \qquad \gamma_1(t) = [\alpha_x(t) \; x_2 \; \cdots \; x_n]$$

Tälle $\gamma_1(0) = A$ ja $\gamma_1(1) = [\hat{x}_1 \; x_2 \; \cdots \; x_n]$, $\hat{x}_1 = \frac{x_1}{\|x_1\|}$ ja $\gamma_1(t) \in GL(n, \mathbb{C})$ sillä determinantin multilineaarisuuden nojalla

$$\det \left[\frac{x_1}{1 + t(\|x_1\| - 1)} \; x_2 \; \cdots \; x_n\right] = \frac{1}{1 + t(\|x\| - 1)} \det[x_1 \; x_2 \; \cdots \; x_n].$$

Vastaavasti koska

$$\det[\hat{x}_1 \;\; x_2 - t(\hat{x}_1 \cdot x_2)\hat{x}_1 \;\; x_3 \; \cdots \; x_n]$$

$$= \det[\hat{x}_1 \; x_2 \; x_3 \; \cdots \; x_n],$$

$$\gamma_2 : [0,1] \to GL(n, \mathbb{C}) \quad \gamma_2(t) = [\hat{x}_1 \;\; x_2 - t(\hat{x}_1 \cdot x_2)\hat{x}_1 \;\; x_3 \; \cdots \; x_n]$$

on hyvin määritelty polku jolle

$$\gamma_2(0) = [\hat{x}_1 \; x_2 \; \cdots \; x_n] \quad \text{ja} \quad \gamma_2(1) = [\hat{x}_1, \; x_2 - (\hat{x}_1 \cdot x_2)\hat{x}_1 \; x_3 \; \cdots \; x_n]$$

el. $\gamma_2(1)$:ssä ensimmäiset kaksi saraketta ovat ortogonaaliset.

Näin jatkamalla saadaan polku $A \rightsquigarrow B$. $\square$

## Yleistetyistä ortogonaaliryhmistä

Erilaisia sisätulon yleistyksiä vastaa usein jokin ortogonaaliryhmän yleistys joka koostuu lineaarikuvauksista jotka säilyttävät tämän sisätulon.

### symplektiset ryhmät $Sp(n)$:

| $\mathbb{R}^n$ | $\mathbb{C}^n$ | $\mathbb{H}^n$ |
|---|---|---|
| symmetrinen sisätulo | hermiittinen sisätulo | kvaternio-sisätulo $(q_1,\dots,q_n)\cdot(p_1,\dots,p_n)=\sum_{j=1}^{n}\overline{q_j}\,p_j$ |
| $O(n)=\{A : A^TA=I\}$ | $U(n)=\{A\in GL(n,\mathbb{C}) : A^*A=I\}$ | $Sp(n)=\{A\in GL(n,\mathbb{H}) : A^*A=I\}$ |

Kvaternioista koostuvia matriisiavaruuksia $M_n(\mathbb{H})$ ja ryhmää $GL(n,\mathbb{H})$ ei tulla varsinaisesti käsittelemään.

Monet matriisiryhmien ja -avaruuksien todistukset toimivat sellaisinaan, toisissa taas joudutaan olemaan tarkkana. Ongelmia aiheuttaa kvaternioiden kommutatiivisuuden puuttuminen, jolloin esim $M_n(\mathbb{H})$ ei ole vektoriavaruus $\mathbb{H}$:n suhteen (vektoriavaruus vaatii kunnan) ja esim determinantin määrittely aiheuttaa vaikeuksia.

### Yleistetyt ortogonaaliryhmät $O(p,q)$

Joustamalla positiividefiniittiydestä $x\cdot x\geq 0$ voidaan määritellä $(p,q)$-sisätulo

$$\mathbb{R}^{p+q}\times\mathbb{R}^{p+q}\to\mathbb{R}$$

$$(x_1,\dots,x_p,x_1',\dots,x_q')\cdot(y_1,\dots,y_p,y_1',\dots,y_q')=x_1y_1+\dots+x_py_p-x_1'y_1'-\dots-x_q'y_q'$$

eli sisätulo epädefiniitin matriisin $Q=\mathrm{diag}(\underbrace{1,\dots,1}_{p\text{ kpl}},\underbrace{-1,\dots,-1}_{q\text{ kpl}})$ avulla

$$x\cdot y=x^TQy.$$

Tämän sisätulon säilyttävät lineaarikuvaukset $(p,q)$-ortogonaaliryhmässä

$$O(p,q)=\{A\in GL(p+q,\mathbb{R}) : A^TQA=Q\}$$

Esim aika-avaruuden symmetrioita mallintaa Lorentzin ryhmä $O(3,1)$ (tai $O(1,3)$ merkkikonventiosta riippuen)