Yhden parametrin aliryhmät

Määr 4.13

Polku $\alpha : (a,b) \to M_n(\mathbb{K})$ on <u>derivoituva</u> jos raja-arvo
(tai käyrä)

$$\alpha'(t) = \lim_{s \to t} \frac{\alpha(s) - \alpha(t)}{s - t}$$

on olemassa $\forall t \in (a,b)$. $\alpha'(t) \in M_n(\mathbb{K})$ on <u>polun α derivaatta pisteessä t</u>.
Polun derivaattaa tullaan merkitsemään myös $\alpha'(t) = \frac{d}{dt}\alpha(t) = \frac{d}{ds}\alpha(s)\Big|_{s=t}$.

Lemma 4.14

$\mathbb{R} \to GL(n,\mathbb{K}) : t \mapsto e^{At}$ on derivoituva kaikilla $A \in M_n(\mathbb{K})$

ja $\frac{d}{dt} e^{At} = A e^{At}$.

Tod

Potenssisarjan suppenemissäteen sisällä derivaatta saadaan ottamalla potenssisarjan derivaatta termeittäin. Lemman 4.3 nojalla potenssisarjan

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} \cdot t^k$$

suppenemissäde on ∞, eli tämä suppenee $\forall t \in \mathbb{R}$. Näin ollen $\forall t \in \mathbb{R}$

$$\frac{d}{dt} e^{At} = \frac{d}{dt} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} t^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} k t^{k-1} = A \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A^{k-1}}{(k-1)!} t^{k-1} = A e^{At}. \quad \square$$

Määr 4.15

Olkoon G matriisiryhmä.
<u>Yhden parametrin semiryhmä G:ssä</u> on käyrä $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to G$ joka on derivoituva 0:ssa ja jolle $\gamma(s+t) = \gamma(s)\gamma(t)$ kun $s, t, s+t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$.
Jos $\varepsilon = \infty$, eli $\gamma : \mathbb{R} \to G$, niin γ on <u>yhden parametrin aliryhmä G:ssä</u>.

Huom

Ehdosta $\gamma(0+0) = \gamma(0)\gamma(0)$ seuraa että $\gamma(0) = I$.

Lemma 4.16

T1 6.2
2

Olkoon G matriisiryhmä ja $\gamma:(-\varepsilon,\varepsilon)\to G$ yhden parametrin semiryhmä. Tällöin γ on kaikkialla derivoituva ja

$$\frac{d}{dt}\gamma(t) = \gamma'(t) = \gamma'(0)\cdot\gamma(t) = \gamma(t)\cdot\gamma'(0)$$

Tod

Olkoon $t\in(-\varepsilon,\varepsilon)$. Kun $|h|<\varepsilon-|t|$, $\gamma(t+h)$ on määritelty ja

$\cancel{\gamma(t+h)=}$ $\gamma(h)\gamma(t) = \gamma(h+t) = \gamma(t+h) = \gamma(t)\gamma(h)$.

Näin ollen

$$\gamma'(t) = \lim_{h\to 0}\frac{\gamma(t+h)-\gamma(t)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\gamma(h)\gamma(t)-I\gamma(t)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\gamma(h)-I}{h}\gamma(t) = \gamma'(0)\gamma(t)$$

ja vastaavasti $\gamma'(t) = \gamma(t)\gamma'(0)$. □

Lemma 4.17

Olkoon $\gamma:(-\varepsilon,\varepsilon)\to G$ yhden parametrin semiryhmä. Tällöin on olemassa yksikäsitteinen yhden parametrin aliryhmä $\hat\gamma:\mathbb{R}\to G$ jolle $\forall t\in(-\varepsilon,\varepsilon)$ $\gamma(t)=\hat\gamma(t)$.

Tod

Olkoon $t\in\mathbb{R}$. Riittävän suurelle $m\in\mathbb{N}$ $t/m\in(-\varepsilon,\varepsilon)$. Haluttu yhden parametrin aliryhmä saadaan määrittelemällä

$$\hat\gamma(t) = \gamma(t/m)^m.$$

Tarkistetaan, että tämä määritelmä on hyvin asetettu, eli että se ei riipu luvun m valinnasta.

Jos t/m ja t/n ovat molemmat välillä $(-\varepsilon,\varepsilon)$ niin myös $t/mn\in(-\varepsilon,\varepsilon)$. Tällöin

$$\gamma(t/m)^m = \gamma(nt/mn)^m = \left(\gamma(t/mn)^n\right)^m = \gamma(mt/mn)^n = \gamma(t/n)^n,$$

joten määritelmä on hyvin asetettu.

Se, että $\hat\gamma$ on yhden parametrin aliryhmä saadaan kommutatiivisuudesta

$$\gamma(a)\gamma(b) = \gamma(a+b) = \gamma(b+a) = \gamma(b)\gamma(a) \quad \forall a,b\in(-\varepsilon,\varepsilon).$$

Olkoot $t,s\in\mathbb{R}$. Olkoon $m\in\mathbb{N}$ riittävän iso, jotta $\frac{t}{m},\frac{s}{m},\frac{t+s}{n}\in(-\varepsilon,\varepsilon)$. Tällöin kommutatiivisuuden ja $\hat\gamma$ määritelmän nojalla

$$\hat\gamma(t)\hat\gamma(s) = \gamma(t/m)^m\gamma(s/m)^m = \left(\gamma(t/m)\gamma(s/m)\right)^m = \gamma\left(\tfrac{t+s}{n}\right)^m = \hat\gamma(t+s)$$

T16.7
3

Yhden parametrin aliryhmän derivoituvuus ehto on välitön, sillä

$$\hat{\gamma}'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{\hat{\gamma}(h) - \hat{\gamma}(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\gamma(h) - \gamma(0)}{h} = \gamma'(0)$$

koska $\hat{\gamma}(h) = \gamma(h) \ \forall |h| < \varepsilon$.

Yksikäsitteisyys seuraa homomorfismiominaisuudesta. Jos $\hat{\gamma}_2 : \mathbb{R} \to G$ on yhden parametrin aliryhmä jolle $\hat{\gamma}_2(t) = \gamma(t) \ \forall t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, niin

$$\hat{\gamma}_2(t) = \hat{\gamma}_2(t/m)^m \quad \forall m \in \mathbb{N}$$

joten $\hat{\gamma}$:n määritelmän perusteella $\hat{\gamma}_2(t) = \hat{\gamma}(t)$. $\square$

Lause 4.18

$\gamma : \mathbb{R} \to G$ on yhden parametrin aliryhmä $\Rightarrow$ $\gamma(t) = \exp(tA)$ jollekin $A \in M_n(\mathbb{K})$

Tod

Olkoon $A = \gamma'(0)$. Lemman 4.16 nojalla γ toteuttaa differentiaaliyhtälön

$$\gamma'(t) = A\gamma(t) = \gamma(t)A$$

Toisaalta Lemman 4.14 nojalla myös $B : \mathbb{R} \to GL(n, \mathbb{K})$

$$B : t \mapsto e^{At}$$

toteuttaa saman differentiaaliyhtälön.

Lisäksi $e^{A\cdot 0} = I = \gamma(0)$. Näin ollen $t \mapsto \gamma(t)B(t)^{-1}$ on käyrä jolle

$\gamma(0)B(0)^{-1} = I$ ja

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\gamma(t)B(t)^{-1} &= \left(\frac{d}{dt}\gamma(t)\right)B(t)^{-1} + \gamma(t)\left(\frac{d}{dt}B(t)^{-1}\right) \\
&= \gamma'(t)\exp(-tA) + \gamma(t)\left(\frac{d}{dt}\exp(-tA)\right) \\
&= A\gamma(t)\exp(-tA) - \gamma(t)A\exp(-tA) \\
&= \underbrace{(A\gamma(t) - \gamma(t)A)}_{=0}\exp(-tA) \\
&= 0
\end{aligned}$$

eli $\gamma(t)B(t)^{-1} = I \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad \gamma(t) = B(t) = \exp(tA)$ $\square$

III Lien algebra – Lien ryhmä vastaavuus

5. Matriisiryhmän tangenttiavaruus ja Lien algebrat

Määr 5.1

Matriisiryhmän $G < GL(n, \mathbb{K})$ tangenttiavaruus pisteessä $U \in G$ on

$$T_U G = \{\gamma'(0) \in M_n(\mathbb{K}) : \gamma \text{ derivoituva käyrä, ja } \gamma(0) = U\}$$
$$\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to G$$

Huom

Yhden parametrin aliryhmä on aina derivoituva käyrä I:n läpi.
Jos $\gamma(t) = \exp(tA) \in G$, niin $\gamma'(0) = A \in T_I G$.
Myöhemmin osoitetaan että $T_I G$ on täsmälleen matriisien $A \in M_n(\mathbb{K})$ kokoelma joille $\exp(tA) \in G$ $\forall t \in \mathbb{R}$.

Lemma 5.2

$T_U G \subset M_n(\mathbb{K})$ on $\mathbb{R}$-vektoriavaruus

Tod

Olkoot $A, B \in T_U G$ ja $\alpha : (-\varepsilon_1, \varepsilon_1) \to G$ sekä $\beta : (-\varepsilon_2, \varepsilon_2) \to G$ käyriä joille $\alpha'(0) = A$ ja $\beta'(0) = B$.

(i) $A + B \in T_U G$: Tarkastellaan differentioituvaa käyrää

$$\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to G \quad \gamma(t) = \alpha(t) \cdot U^{-1} \cdot \beta(t), \quad \varepsilon = \min(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$$

Derivaatan tulosäännön nojalla

$$\gamma'(0) = \alpha'(0) \cdot U^{-1} \cdot \beta(0) + \alpha(0) \cdot U^{-1} \cdot \beta'(0)$$
$$= A \cdot U^{-1} \cdot U + U \cdot U^{-1} \cdot B = A + B.$$

Koska lisäksi $\gamma(0) = \alpha(0) U^{-1} \beta(0) = U U^{-1} U = U$, $A + B = \gamma'(0) \in T_U G$.

(ii) $\lambda A \in T_U G$ $\forall \lambda \in \mathbb{R}$: Tarkastellaan differentioituvaa käyrää

$$\gamma : \left(-\frac{\varepsilon_1}{\lambda}, \frac{\varepsilon_1}{\lambda}\right) \to G \quad \gamma(t) = \alpha(\lambda t).$$

Tälle $\gamma(0) = \alpha(\lambda \cdot 0) = \alpha(0) = U$ joten

$$\gamma'(0) = \lambda \alpha'(0) = \lambda A \in T_U G$$

(iii) $0 \in T_U G$: Vakiokäyrän $\gamma : \mathbb{R} \to G$, $\gamma(t) = U$ derivaatta on $\gamma'(0) = 0 \in T_U G$. □

Huom

Tangenttiavaruus määritellään käyrien $\gamma: I \to G$, $I \subset \mathbb{R}$ avulla. Tämän takia tapauksessa $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ $T_U G$ ei välttämättä ole $\mathbb{C}$-vektoriavaruus.

Lause 5.3

Matriisiryhmän tangenttiavaruudet ovat isomorfisia, eli: $T_{U_1} G \simeq T_{U_2} G$ $\forall U_1, U_2 \in G$.

Tod

Riittää osoittaa, että $T_I G \simeq T_U G$. Määritellään

$$L: T_I G \to T_U G, \qquad L(A) = UA.$$

1) L on hyvin määritelty:

Jos $A \in T_I G$, on olemassa käyrä $\alpha: (-\varepsilon, \varepsilon) \to G$ jolle $\alpha(0) = I$ ja $\alpha'(0) = A$. Tällöin käyrälle $\tilde{\alpha}: (-\varepsilon, \varepsilon) \to G$, $\tilde{\alpha}(t) = U\alpha(t)$, $\tilde{\alpha}(0) = UI = U$ ja $\tilde{\alpha}'(0) = UA$, joten $UA \in T_U G$.

2) L on lineaarinen:

Tämä seuraa matriisitulon lineaarisuudesta:

$$L(A+B) = U(A+B) = UA + UB = L(A) + L(B) \text{ ja}$$
$$L(\lambda A) = U\lambda A = \lambda UA = \lambda L(A).$$

3) L on bijektio:

Koska $U \in G < GL(n, \mathbb{K})$, on olemassa $U^{-1} \in G$.
Kuvauksena $M_n(\mathbb{K}) \to M_n(\mathbb{K})$, $A \mapsto U^{-1}A$ on kuvauksen L käänteiskuvaus, mutta tässä rajoitetaan pienempään osajoukkoon, joten pitää tarkistaa, että

$$T_U G \to T_I G, \quad A \mapsto U^{-1}A$$

on hyvin määritelty.

Tämä seuraa samasta argumentista kuin 1):

Jos $A \in T_U G$, niin $A = \alpha'(0)$ jollekin derivoituvalle käyrälle $\alpha: (-\varepsilon, \varepsilon) \to G$ jolle $\alpha(0) = U$. Tällöin $\tilde{\alpha}(t) = U^{-1}\alpha(t)$ on derivoituva käyrä jolle $\tilde{\alpha}(0) = U^{-1}U = I$ ja $\tilde{\alpha}'(0) = U^{-1}A$. $\Rightarrow U^{-1}A \in T_I G$. $\square$