Määr 5.4

TO 8.2
1

Matriisiryhmän G dimensio on $\dim G = \dim_{\mathbb{R}} T_I G$.

Jos $T_I G$ on $\mathbb{C}$-vektoriavaruus, niin matriisiryhmän G kompleksinen dimensio on $\dim_{\mathbb{C}} G = \dim_{\mathbb{C}} T_I G$.

Esim 5.5

Määritetään yleisen lineaarisen ryhmän $GL(n,\mathbb{R})$ tangenttiavaruus $T_I GL(n,\mathbb{R})$.

Määritelmän mukaan $T_I GL(n,\mathbb{R}) \subset M_n(\mathbb{R})$.

Toisaalta, mielivaltaiselle $A \in M_n(\mathbb{R})$, $t \mapsto \exp(tA)$ on käyrä jolle $\exp(0\cdot A) = I$ ja $\frac{d}{dt}\exp(tA) = A$, joten

$$T_I GL(n,\mathbb{R}) = M_n(\mathbb{R})$$

Näin ollen $\dim GL(n,\mathbb{R}) = \dim M_n(\mathbb{R}) = n^2$.

Huom. edellä inkluusio $M_n(\mathbb{R}) \subset T_I GL(n,\mathbb{R})$ olisi voitu todistaa myös käyttäen käyriä

$$t \mapsto I + tA$$

sillä riittävän pienille $t \in \mathbb{R}$, $I + tA \in GL(n,\mathbb{R})$.

Yleisesti matriisiryhmille $G < GL(n,\mathbb{K})$ sen sijaan vaikka $A \in T_I G$, on mahdollista että $I + tA \notin G \quad \forall t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Matriisiryhmän (tai yleisemmin Lien ryhmän) tangenttiavaruudella on enemmänkin kuin pelkkä vektoriavaruusrakenne. Annetaan ensin abstrakti määritelmä

TO 8.2
2

Määr 5.6

$\mathbb{K}$ – Lien algebra (tai Lien algebra kunnan $\mathbb{K}$ yli)

on $\mathbb{K}$-vektoriavaruus $\mathfrak{g}$ varustettuna Lien sulkeilla, eli $\mathbb{K}$-bilineaarisella kuvauksella $[\cdot,\cdot] : \mathfrak{g}\times\mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ jolle

(i) $\forall x,y\in\mathfrak{g}$ $\quad [x,y] = -[y,x]$ $\quad$ (antikommutatiivisuus)

(ii) $\forall x,y,z\in\mathfrak{g}$ $\quad [x,[y,z]] + [y,[z,x]] + [z,[x,y]] = 0$ (Jacobin identiteetti)

Lien algebroja merkitään usein goottisilla kirjaimilla $\mathfrak{g}, \mathfrak{h}, \ldots$

$\mathbb{K}$-bilineaarisuus tarkoittaa, että

$$[x, ay] = a[x,y] \ , \quad [ax, y] = a[x,y] \quad \forall a\in\mathbb{K},\ x,y\in\mathfrak{g}$$

$$[x, y+z] = [x,y] + [x,z] \ , \quad [x+y, z] = [x,z] + [y,z] \quad \forall x,y,z\in\mathfrak{g}.$$

(Tylsä) Esimerkki 5.7

Mikä tahansa $\mathbb{K}$-vektoriavaruus V varustettuna nollasulkeilla $[x,y]=0$ $\forall x,y\in V$ on Lien algebra.

Tämä on n.s. abelinen Lien algebra

Esimerkki 5.8

Asetetaan $\mathbb{R}^3$:issa $[x,y] = x\times y$ (ristitulo). Tällöin $(\mathbb{R}^3, [\cdot,\cdot])$ on Lien algebra.

Standardikannalle

$$[e_1, e_2] = -[e_2, e_1] = e_3$$
$$[e_2, e_3] = -[e_3, e_2] = e_1$$
$$[e_3, e_1] = -[e_1, e_3] = e_2$$

Muista: imaginäärikvaternioille $u,v\in \mathbb{R}i+\mathbb{R}j+\mathbb{R}k$, $uv = -u\cdot v + u\times v$

joten ylläolevat ovat vain relaatiot

$$ij = k \ , \quad jk = i \ , \quad ki = j$$

Antikommutatiivisuus saadaan ristitulon antikommutatiivisuudesta.
Tarkistetaan Jacobin identiteetti vektoreille $x=e_1$, $y=e_2$, $z=e_3$

$$[e_1,[e_2,e_3]]+[e_2,[e_3,e_1]]+[e_3,[e_1,e_2]]$$
$$=[e_1,e_1]+[e_2,e_2]+[e_3,e_3]=0,$$

sillä antikommutatiivisuus $\Rightarrow [x,x]=0 \quad \forall x$.

Lemma 5.9

Olkoon $\mathfrak{g}$ $\mathbb{K}$-vektoriavaruus varustettuna $\mathbb{K}$-bilineaarisella antikommutatiivisella $[\cdot,\cdot]:\mathfrak{g}\times\mathfrak{g}\to\mathfrak{g}$.
Olkoon $\{x_1,\dots,x_n\}$ $\mathfrak{g}$:n $\mathbb{K}$-kanta. Jos

$$[x_i,[x_j,x_k]]+[x_j,[x_k,x_i]]+[x_k,[x_i,x_j]]=0$$

$\forall 1\leq i<j<k\leq n$, niin $(\mathfrak{g},[\cdot,\cdot])$ on $\mathbb{K}$-Lien algebra.

Tod

HT

Lause 5.10

$M_n(\mathbb{K})$ varustettuna kommutaattorisulkeilla $[A,B]=AB-BA$ on $\mathbb{K}$-Lien algebra. Tätä Lien algebraa merkitään usein $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{K})$.

Tod

$M_n(\mathbb{K})$ on $\mathbb{K}$-vektoriavaruus.

Kommutaattorin bilineaarisuus:

$$[\lambda A+B,C]=(\lambda A+B)C-C(\lambda A+B)=\lambda(AC-CA)+BC-CB=\lambda[A,C]+[B,C]$$

(Toisen komponentin lineaarisuus saadaan antikommutatiivisuudesta)

Antikommutatiivisuus:

$$[A,B]=AB-BA=-(BA-AB)=-[B,A]$$

Jacobi:

$$[A,[B,C]]+[B,[C,A]]+[C,[A,B]]$$
$$=A(BC-CB)-(BC-CB)A+B(CA-AC)-(CA-AC)B+C(AB-BA)-(AB-BA)C$$
$$=ABC-ACB-BCA+CBA+BCA-BAC-CAB+ACB+CAB-CBA-ABC+BAC$$
$$=0$$

$\square$

Määr 5.11

TO 8.2

4

Olkoon $\mathfrak{g}$ $\mathbb{K}$-Lienalgebra. $\mathbb{K}$-aliavaruus $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ on $\mathfrak{g}$:n <u>$\mathbb{K}$-Lien alialgebra</u> jos se on suljettu Lien sulkeiden suhteen eli $\forall x,y \in \mathfrak{h}$: $[x,y] \in \mathfrak{h}$.

Tällöin merkitään aliryhmänotaatiota imitoiden $\mathfrak{h} < \mathfrak{g}$.

Lause 5.12

Matriisiryhmän $G < GL(n,\mathbb{K})$ tangenttiavaruus $T_I G$ on $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{K})$:n $\mathbb{R}$-Lien alialgebra.

Jos $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ja $T_I G < \mathfrak{gl}(n,\mathbb{C})$ on $\mathbb{C}$-aliavaruus, se on myös $\mathbb{C}$-Lien alialgebra.

Tod

Lemman 5.2 nojalla $T_I G \subset \mathfrak{gl}(n,\mathbb{K})$ $\big(= M_n(\mathbb{K}), [\cdot,\cdot]\big)$ on $\mathbb{R}$-aliavaruus. Riittää siis osoittaa, että $\forall A,B \in T_I G$

$$[A,B] = AB - BA \in T_I G$$

Olkoot $\alpha : (-\varepsilon,\varepsilon) \to G$ ja $\beta : (-\delta,\delta) \to G$ derivoituvia ~~käyriä~~, joille $\alpha(0) = \beta(0) = I$ ja $\alpha'(0) = A$, $\beta'(0) = B$.

Tarkastellaan kuvausta

$$F : (-\varepsilon,\varepsilon) \times (-\delta,\delta) \to G, \quad F(t,s) = \alpha(t)\beta(s)\alpha(t)^{-1}\beta(s)^{-1}$$

eli ns. $\alpha(t)$:n ja $\beta(s)$:n ryhmäkommutaattoria.

Kaikilla $t \in (-\varepsilon,\varepsilon)$ kuvaus $s \mapsto F(t,s)$ on derivoituva käyrä ja $F(t,0) = I$, ja tulosäännön nojalla

$$\frac{d}{ds} F(t,s)\Big|_{s=0} = \alpha(t)\beta'(0)\alpha(t)^{-1}\beta(0)^{-1} + \underbrace{\alpha(t)\beta(0)\alpha(t)^{-1}}_{\substack{=\alpha(t)\alpha(t)^{-1} \\ = I}} \underbrace{\frac{d}{ds}\beta(s)^{-1}\Big|_{s=0}}_{\substack{= -\beta'(0) \\ = -B}}$$

$$= \alpha(t) B \alpha(t)^{-1} - B \in T_I G$$

Koska $T_I G$ on vektoriavaruus, myös

$$T_I G \ni \frac{\alpha(t) B \alpha(t)^{-1} - B}{t} \xrightarrow{t \to 0} \frac{d}{dt} \alpha(t) B \alpha(t)^{-1}\Big|_{t=0}$$

$$= \alpha'(0) B \alpha(0)^{-1} + \alpha(0) B \frac{d}{dt}\alpha(t)^{-1}\Big|_{t=0}$$

$$= AB + B(-A) = AB - BA = [A,B]$$

Koska $T_I G \subset \mathfrak{gl}(n,\mathbb{K})$ on suljettu, $[A,B] \in T_I G$. $\square$

Määr 5.13

TO 8.2

5

Matriisiryhmän $G < GL(n, \mathbb{K})$ Lien algebra on

$\mathfrak{g} = T_I G$ varustettuna kommutaattorisulkeilla $[A,B] = AB - BA$.

Esimerkin 5.5 nojalla yleisen lineaarisen ryhmän $GL(n, \mathbb{K})$ Lien algebra on $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{K})$, mikä on tämän notaation motivaatio.

Vastaavasti merkitään

$\mathfrak{sl}(n, \mathbb{K})$ = $SL(n, \mathbb{K})$:n Lien algebra

$\mathfrak{so}(n)$ = $SO(n)$:n Lien algebra

$\mathfrak{o}(n)$ = $O(n)$:n Lien algebra

$\mathfrak{u}(n)$ = $U(n)$:n Lien algebra

$\mathfrak{su}(n)$ = $SU(n)$:n Lien algebra, jne...

Tarkastellaan seuraavaksi millaisista matriiseista nämä Lien algebrat koostuvat, eli määritellään ehtoja, jotka takaavat esim. että $\exp(tA) \in SL(n, \mathbb{K})$ $\forall t \in \mathbb{R}$.

Jos $\gamma:(-\varepsilon,\varepsilon) \to SL(n,\mathbb{K})$ on derivoituva käyrä, niin

TO 8.2

6

$$\frac{d}{dt}\det\gamma(t) = \frac{d}{dt}1 = 0$$

Lemma 5.14

Olkoon $\gamma:(-\varepsilon,\varepsilon) \to GL(n,\mathbb{K})$ derivoituva käyrä jolle $\gamma(0)=I$.

Tällöin $\frac{d}{dt}\det\gamma(t)\Big|_{t=0} = \operatorname{tr}\gamma'(0)$

Tod

Merkitään $a_{rs}(t) = (\gamma(t))_{rs}$ matriisin $\gamma(t)$ alkioita ja $C_{rs}(t)$:llä matriisin $\gamma(t)$ kofaktorimatriisia rivin r sarakkeen s suhteen.

Kehittämällä determinantti viimeisen rivin suhteen saadaan tällöin

$$\det\gamma(t) = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{n+k}a_{nk}(t)\cdot\det C_{nk}(t)$$

Derivoimalla tämä saadaan

$$\frac{d}{dt}\det\gamma(t)\Big|_{t=0} = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{n+k}a_{nk}'(0)\det C_{nk}(0) + \sum_{k=1}^{n}(-1)^{n+k}\underbrace{a_{nk}(0)}_{=\begin{cases}1, & n=k\\ 0, & n\neq k\end{cases}}\frac{d}{dt}\det C_{nk}(t)\Big|_{t=0}$$

Koska $\gamma(0)=I$, $a_{nk}(0)=\begin{cases}1, & n=k\\ 0, & n\neq k\end{cases}$ ja $\det C_{nk}=\begin{cases}1, & n=k\\ 0, & n\neq k\end{cases}$.

Näin ollen

$$\frac{d}{dt}\det\gamma(t)\Big|_{t=0} = (-1)^{n+n}a_{nn}'(0) + (-1)^{n+n}\frac{d}{dt}\det C_{nn}(t)\Big|_{t=0}$$

$$= a_{nn}'(0) + \frac{d}{dt}\det C_{nn}(t)\Big|_{t=0}$$

Kehittämällä $\det C_{nn}(t)$ rivin $n-1$ suhteen, $\det C_{n-1,n-1}(t)$ rivin $n-2$ suhteen jne saadaan tällöin

$$\frac{d}{dt}\det\gamma(t)\Big|_{t=0} = a_{nn}'(0) + a_{n-1,n-1}'(0) + \frac{d}{dt}\det C_{n-1,n-1}(t)\Big|_{t=0}$$

$$= \ldots = \sum_{k=1}^{n}a_{kk}'(0) = \operatorname{tr}\gamma'(0)$$

□

TO 8.2

7

Lemma 5.15

$\det \exp(tA) = e^{\operatorname{tr} A}$ $\forall A \in M_n(\mathbb{K})$

Tod

Määritellään $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{K}^*$, $\gamma(t) = \det(\exp(tA))$.

Koska $t \mapsto \exp(tA)$ on derivoituva käyrä ja $\exp(0A) = I$,

Lemman 5.14 nojalla

$$\frac{d}{dt} \gamma(t)\Big|_{t=0} = \operatorname{tr}\left(\frac{d}{dt} \exp(tA)\Big|_{t=0}\right) = \operatorname{tr} A$$

Koska det on homomorfismi ja Lauseen 4.3 nojalla $\exp(t+h)A = \exp(tA)\exp(hA)$,

$$\gamma'(t) = \lim_{h\to 0} \frac{\gamma(t+h) - \gamma(t)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\det \exp((t+h)A) - \det \exp(tA)}{h}$$

$$= \left(\lim_{h\to 0} \frac{\det \exp(hA) - \det I}{h}\right) \det \exp(tA)$$

$$= \gamma'(0)\,\gamma(t) = (\operatorname{tr} A)\cdot \gamma(t)$$

Näin ollen γ toteuttaa saman differentiaaliyhtälön kuin

$t \mapsto e^{\operatorname{tr}(A)\cdot t}$: $\quad \frac{d}{dt} e^{\operatorname{tr}(A)\cdot t} = (\operatorname{tr} A)\, e^{\operatorname{tr}(A)\cdot t}$

ja toisaalta $\det \exp(0 \cdot A) = \det I = 1$, $e^{(\operatorname{tr} A)\cdot 0} = e^0 = 1$,

joten differentiaaliyhtälön ratkaisun yksikäsitteisyys antaa väitteen $\square$

[$x' = c \cdot x$, $c = \operatorname{tr} A \in \mathbb{K}$