T I 13.2

Lause 5.16

$$\mathfrak{sl}(n,\mathbb{K}) = \{A \in M_n(\mathbb{K}) : \operatorname{tr} A = 0\}$$

Tod

"$\subset$" Lemman 5.14 nojalla, jos $A = \alpha'(0) \in \mathfrak{sl}(n,\mathbb{K}) = T_I SL(n,\mathbb{K})$ jollekin $\alpha : (-\varepsilon,\varepsilon) \to SL(n,\mathbb{K})$, $\alpha(0) = I$, niin

$$\operatorname{tr} A = \operatorname{tr} \alpha'(0) = \frac{d}{dt} \det \alpha(t)\Big|_{t=0} = \frac{d}{dt} 1\Big|_{t=0} = 0.$$

"$\supset$" Jos $\operatorname{tr} A = 0$, niin Lemman 5.15 nojalla

$$\det \exp(tA) = e^{\operatorname{tr} A} = e^0 = 1$$

joten $t \mapsto \exp(tA)$ on derivoituva ~~käyrä~~ $SL(n,\mathbb{K})$:ssa. $\square$

Lause 5.17

$$\mathfrak{so}(n) = \mathfrak{o}(n) = \{A \in M_n(\mathbb{R}) : A + A^T = 0\} \quad (= \text{"antisymmetriset matriisit"})$$

Tod

Huomaa että jokainen polku $\alpha : (-\varepsilon,\varepsilon) \to O(n)$, jolle $\alpha(0) = I$ on itse asiassa polku $\alpha : (-\varepsilon,\varepsilon) \to SO(n)$, sillä $\det A = \pm 1 \ \forall A \in O(n)$. Tämän takia $\mathfrak{so}(n) = \mathfrak{o}(n)$.

Jos $\alpha : (-\varepsilon,\varepsilon) \to SO(n)$ on derivoituva ja $\alpha(0) = I$, niin

$$\frac{d}{dt} \alpha(t)^T \alpha(t)\Big|_{t=0} = (\alpha'(0))^T \alpha(0) + \alpha(0)^T \alpha'(0) = \alpha'(0)^T + \alpha'(0)$$

ja toisaalta $\alpha(t)^T \alpha(t) = I$, mistä seuraa että

$$\forall A \in \mathfrak{so}(n) \qquad A^T + A = 0.$$

Jos taas $A \in M_n(\mathbb{R})$ on mielivaltainen matriisi jolle $A + A^T = 0$, niin $\alpha(t) = \exp(At)$ toteuttaa ehdon

$$\alpha(t)^T \alpha(t) = \exp(At)^T \exp(At) = \exp(A^T t)\exp(At) = \exp(-At)\exp(At)$$
$$= \exp(-At + At) = \cancel{\exp((A^T+A)t)} = I$$

joten $\exp(At) \in O(n)$, ja edelleen $A \in \mathfrak{o}(n)$. $\square$

Lause 5.18

$$\mathfrak{u}(n) = \{A \in M_n(\mathbb{C}) : \ A + A^* = 0\}$$ ("antihermiittiset matriisit")

$$\mathfrak{su}(n) = \{A \in M_n(\mathbb{C}) : \ A + A^* = 0, \ \operatorname{tr} A = 0\}$$

Huomaa kompleksisen ja reaalisen tapauksen ero!
reaalisessa tapauksessa ehdosta $A + A^T = 0$ seuraa $\operatorname{tr} A = 0$, sillä antisymmetrisen (reaali)matriisin diagonaalilla on vain nollia.
Kompleksisessa tapauksessa taas ehto $A + A^*$ sanoo vain, että diagonaalin alkioille $a_{kk} + \overline{a_{kk}} = 0$, eli että diagonaalialkiot ovat imaginaarisia.

Lauseen 5.18 tod

Olkoon $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \to U(n)$ derivoituva polku, $\alpha(0) = I$.
kuten reaalisessa tapauksessa

$$0 = \frac{d}{dt} \alpha(t)\alpha(t)^* \Big|_{t=0} = \alpha'(0)\alpha(0)^* + \alpha(0)(\alpha'(0))^* = \alpha'(0) + \alpha'(0)^*.$$

ja käyrälle $\alpha(t) = \exp(tA)$, $A + A^* = 0$,

$$\alpha(t)\alpha(t)^* = \exp(tA)\exp(tA^*) = \exp(tA)\exp(-tA) = I.$$

$SU(n)$:n tapaus seuraa identiteetistä

$$SU(n) = U(n) \cap SL(n, \mathbb{C}),$$

sillä tällöin (*)

$$\mathfrak{su}(n) = \mathfrak{u}(n) \cap \mathfrak{sl}(n, \mathbb{C}) = \{A + A^* = 0\} \cap \{\operatorname{tr} A = 0\}. \qquad \square$$

Edellä kohdassa (*) hyödynnettiin seuraavaa

Lemma 5.19

Olkoot $G, H < GL(n,\mathbb{K})$ matriisiryhmiä ja $\mathfrak{g}, \mathfrak{h} < \mathfrak{gl}(n,\mathbb{K})$ niiden Lien algebrat. Tällöin matriisiryhmän $G \cap H$ Lien algebra on $\mathfrak{g} \cap \mathfrak{h}$.

Tod

HT

Huom

Toisin kuin voisi arvata, $U(n)$ ja $SU(n)$ eivät ole $\mathbb{C}$-Lien algebroja. Nimittäin esimerkiksi

$$A = \begin{bmatrix} i & & & \\ & -i & & \\ & & 0 & \\ & & & \ddots \\ & & & & 0 \end{bmatrix} \in SU(n) \qquad \left(A^* = \begin{bmatrix} -i & & & \\ & i & & \\ & & \ddots & \\ & & & 0 \end{bmatrix} = -A \right)$$

mutta

$$iA = \begin{bmatrix} -1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 0 & \\ & & & \ddots \\ & & & & 0 \end{bmatrix} \notin SU(n) \qquad \left((iA)^* = \bar{i} A^* = -\bar{i} A = iA \right)$$

Itse asiassa $U(n)$ on "yhtä lähellä" (ja kaukana) kompleksista Lien algebraa kuin $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{R})$.

Tämän väitteen täsmällistä muotoilua varten tarkastellaan hieman reaalisia vs. kompleksisia Lien algebroja.

Määritelmä 5.20

Kuvaus $\varphi: \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ $\mathbb{K}$-Lien algebrojen $\mathfrak{g}$ ja $\mathfrak{h}$ välillä on <u>$\mathbb{K}$-Lien algebrojen morfismi</u> jos φ on $\mathbb{K}$-lineaarinen ja

$$\varphi([X,Y]) = [\varphi(X), \varphi(Y)] \quad \forall X, Y \in \mathfrak{g}.$$

Jos φ on lisäksi bijektiivinen, φ on $\mathbb{K}$-Lien algebrojen isomorfismi.

Lien algebran kompleksifikaatio

Määritelmä 5.20

$\mathbb{R}$-Lien algebra $\mathfrak{g}$:n kompleksifikaatio on $\mathbb{C}$-Lien algebra H, jolle $\mathfrak{g} < H$ ja $\dim_{\mathbb{C}} H = \dim_{\mathbb{R}} \mathfrak{g}$. Tällöin merkitään $H = \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$.

Lause 5.22

(äärellisulotteisella)

(i) Jokaisella Lien algebralla on kompleksifikaatio

(ii) Jos H_1 ja H_2 ovat $\mathfrak{g}$:n kompleksifikaatioita, niin on olemassa $\mathbb{C}$-Lien algebrojen isomorfismi $\varphi : H_1 \to H_2$ jolle $\varphi(X) = X \ \forall X \in \mathfrak{g}$.

Todistuksen idea

(i) Tehdään $\mathbb{R}$-kannasta $\mathbb{C}$-kanta (abstraktisti $H = \mathfrak{g} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$)

(reaalisten vektoriavaruuksien tensoritulo)

(ii) "Tehdään $\mathbb{C}$-kannasta $\mathbb{R}$-kanta".

koska $\dim_{\mathbb{C}} H_1 = \dim_{\mathbb{R}} \mathfrak{g} = \dim_{\mathbb{C}} H_2$, saadaan yksikäsitteinen kuvaus $\varphi : H_1 \to H_2$.

$$\begin{array}{ccc} H_1 & \overset{\varphi}{\dashrightarrow} & H_2 \\ \vee & & \vee \\ \mathfrak{g} & \xrightarrow{id} & \mathfrak{g} \end{array}$$

Se että φ on $\mathbb{C}$-Lien algebrojen morfismi seuraa siitä että $id : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ on $\mathbb{R}$-Lien algebrojen morfismi.

Lause 5.23

$$\mathfrak{u}(n)_{\mathbb{C}} = \mathfrak{gl}(n,\mathbb{C}) = \mathfrak{gl}(n,\mathbb{R})_{\mathbb{C}}$$ ja
$$\mathfrak{su}(n)_{\mathbb{C}} = \mathfrak{sl}(n,\mathbb{C}) = \mathfrak{sl}(n,\mathbb{R})_{\mathbb{C}}$$

Tod

Merkitään E^{rs} matriisia jolle $(E^{rs})_{ij} = \begin{cases} 1, & r=i,\ s=j \\ 0, & r\neq i \text{ tai } s\neq j \end{cases}$

$\mathfrak{u}(n)$:llä on $\mathbb{R}$-kanta (HT):
iE^{kk}, $k=1,\dots,n$, $E^{rs}-E^{sr}$, $1\le r<s\le n$, $iE^{rs}+iE^{sr}$, $1\le r<s\le n$

$\mathfrak{u}(n)_{\mathbb{C}}$ sisältää nämä kerrottuna mielivaltaisilla kompleksiluvuilla,
eli erityisesti matriisit

$$-i(iE^{kk}) = E^{kk}, \qquad k=1,\dots,n$$
$$-\tfrac{1}{2}(E^{rs}-E^{sr}) - \tfrac{i}{2}(iE^{rs}+iE^{sr}) = E^{sr}, \qquad 1\le r<s\le n$$
$$\tfrac{1}{2}(E^{rs}-E^{sr}) - \tfrac{i}{2}(iE^{rs}+iE^{sr}) = E^{rs}, \qquad 1\le r<s\le n$$

jotka muodostavat $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{C})$:in $\mathbb{C}$-kannan.

$\mathfrak{su}(n)$:in tapaus on vastaava. Ainoa ero on, että matriisien iE^{kk} sijaan kannassa on matriisit $i(E^{kk}-E^{k+1,k+1})$, $k=1,\dots,n-1$, (HT)
ja se että ei saada koko $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{C})$:in kantaa vaan $\mathfrak{sl}(n,\mathbb{C})$:n,
sillä $\mathbb{R}$-kanta toteuttaa $\operatorname{tr} A=0$ $\Rightarrow$ myös $\mathbb{C}$-kanta toteuttaa $\operatorname{tr} A=0$.

Tapaukset $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{R})_{\mathbb{C}} = \mathfrak{gl}(n,\mathbb{C})$ ja $\mathfrak{sl}(n,\mathbb{R})_{\mathbb{C}} = \mathfrak{sl}(n,\mathbb{C})$ saadaan myös vastaavasti:

$$\mathfrak{gl}(n,\mathbb{R}) = \operatorname{span}_{\mathbb{R}}\{E^{rs} : 1\le r,s\le n\}, \quad \mathfrak{gl}(n,\mathbb{C}) = \operatorname{span}_{\mathbb{C}}\{E^{rs} : 1\le r,s\le n\},$$
$$\mathfrak{sl}(n,\mathbb{K}) = \operatorname{span}_{\mathbb{K}}\{E^{rs} ; r\neq s\} \cup \{E^{kk}-E^{k+1,k+1}, 1\le k\le n-1\}$$ $\square$