6 Matriisiryhmien ja niiden Lien algebrojen ominaisuuksien yhteyksiä

Lemma 6.1

Olkoot $G, H < GL(n,\mathbb{K})$ matriisiryhmiä ja $\mathfrak{g}, \mathfrak{h} < \mathfrak{gl}(n,\mathbb{K})$ niiden Lien algebrat. Tällöin

$$G < H \Rightarrow \mathfrak{g} < \mathfrak{h}$$

Tod

Koska sekä $\mathfrak{g}$ että $\mathfrak{h}$ ovat $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{K})$:n alialgebroja, riittää tarkistaa että $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{h}$.

Olkoon $A \in \mathfrak{g}$. Tällöin on olemassa derivoituva käyrä $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \to G$ jolle $\alpha(0) = I$ ja $\alpha'(0) = A$.

Toisaalta α on tällöin myös käyrä H:ssa, joten $A = \alpha'(0) \in \mathfrak{h}$. $\square$

Huom

Käänteinen implikaatio "$\mathfrak{g} < \mathfrak{h} \Rightarrow G < H$" ei aina päde.

Esim jos $G = O(n)$ ja $H = SO(n)$, niin $\mathfrak{g} = \mathfrak{o}(n) = \mathfrak{so}(n) = \mathfrak{h}$, mutta $O(n) \not< SO(n)$.

(Tämä pätee kuitenkin jossain määrin:

$\mathfrak{g} < \mathfrak{h} \Rightarrow \exists$ yksikäsitteinen $\tilde{G} < H$ Lien ryhmä, joka on yhtenäinen ja jonka Lien algebra on $\mathfrak{g}$

mutta tämän ei tarvitse olla matriisiryhmä, sillä se ei ole aina suljettu.)

Monesti Lien teoriassa ryhmien relaatioista seuraa helposti algebrojen relaatio, mutta toiseen suuntaan joudutaan lisäämään jokin rajoite siihen mikä ryhmä algebraan liitetään.

Kanoninen valinta saadaan niin sanotusta "Lien kolmannesta lauseesta" jonka mukaan jokainen äärellisulotteinen Lien algebra on jonkin ~~Lien ryhm~~ yhdesti yhtenäisen Lien ryhmän Lien algebra.

Aliryhmä $\longleftrightarrow$ alialgebra

Normaali aliryhmä $\longleftrightarrow$ ideaali

Määritelmä 6.2

Lien algebran $\mathfrak{g}$ ideaali on aliavaruus $\mathfrak{i} \subset \mathfrak{g}$, jolle $\underbrace{[\mathfrak{i},\mathfrak{g}]}_{= \text{span}\{[X,Y]:\, X\in\mathfrak{i},\, Y\in\mathfrak{g}\}} \subset \mathfrak{i}$, eli:

$$\forall X \in \mathfrak{g} \ \forall I \in \mathfrak{i} \quad [I,X] \in \mathfrak{i}$$

Tällöin merkitään $\mathfrak{i} \lhd \mathfrak{g}$.

Vertaa normaalin aliryhmän määritelmään

$$H \lhd G \Leftrightarrow \forall g \in G \ \forall h \in H \quad ghg^{-1} \in H$$

$$\Longleftrightarrow \forall g \in G \ \forall h \in H \quad ghg^{-1}h^{-1} \in H$$

Yllä Lien algebran kommutaattori $[\cdot,\cdot]$ korvaa ryhmäkommutaattorin $ghg^{-1}h^{-1}$.

Lemma 6.3

Olkoot G, H matriisiryhmiä ja $\mathfrak{g}, \mathfrak{h}$ niiden Lien algebrat. Tällöin

$$H \lhd G \Rightarrow \mathfrak{h} \lhd \mathfrak{g}$$

Tod

Lemman 6.1 nojalla riittää osoittaa $[\mathfrak{h},\mathfrak{g}] \subset \mathfrak{h}$.

Olkoot $A \in \mathfrak{h}$ ja $B \in \mathfrak{g}$, ja $\alpha: (-\varepsilon, \varepsilon) \to H$, $\beta: (-\delta,\delta) \to G$ derivoituvat käyrät joille $\alpha(0) = I = \beta(0)$, $\alpha'(0) = A$, $\beta'(0) = B$.

Tarkastellaan jälleen kuvausta (ks Lause 5.12)

$$F: (-\varepsilon,\varepsilon) \times (-\delta,\delta) \to G, \quad F(t,s) = \alpha(t)\beta(s)\alpha(t)^{-1}\beta(s)^{-1}.$$

Tällä kertaa, koska $H \lhd G$ ja $\alpha(t) \in H$, $F(t,s) \in H \ \forall t,s$.

Näin ollen argumentoiden kuten Lauseessa 5.12 saadaan

$$[A,B] = \lim_{t\to 0} \frac{\frac{d}{ds} F(t,s)\big|_{s=0}}{t} \in \mathfrak{h} \qquad \square$$

Ideaalit Lien algebroissa voidaan karakterisoida vastaavalla tavalla Lien algebrojen morfismien kautta kuin normaalit aliryhmät homomorfismien avulla:

TO 15.2
3

Lemma 6.4

Olkoon $\varphi: \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ Lien algebrojen morfismi.
Tällöin $\ker \varphi \triangleleft \mathfrak{g}$.

Tod

$\ker \varphi = \{A \in \mathfrak{g} : \varphi(A) = 0\}$

Jos $A \in \ker \varphi$ ja $B \in \mathfrak{g}$, niin Lien sulkeiden lineaarisuuden nojalla

$$\varphi([A,B]) = [\varphi(A), \varphi(B)] = [0, \varphi(B)] = 0 \Rightarrow [A,B] \in \ker \varphi. \quad \square$$

Määritelmä 6.5

Olkoot G, H matriisiryhmiä ja $\mathfrak{g}, \mathfrak{h}$ niiden Lien algebrat.
Olkoon $\Phi: G \to H$ derivoituva matriisiryhmien morfismi (eli derivoituva homomorfismi)
kuvauksen Φ derivaatta on kuvaus

$$\Phi_*: \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}, \quad \Phi_*\left(\frac{d}{dt}\alpha(t)\Big|_{t=0}\right) = \frac{d}{dt} \Phi \circ \alpha(t)\Big|_{t=0},$$

missä $\alpha: (-\varepsilon, \varepsilon) \to G$ on mikä tahansa derivoituva käyrä jolle $\alpha(0) = I$.

Lause 6.6

Olkoon $\Phi : G \to H$ derivoituva homomorfismi matriisiryhmien G ja H välillä. Tällöin $\Phi_* : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ on $\mathbb{R}$-Lien algebrojen morfismi.

Tod

Kuvauksen Φ_* lineaarisuus todistetaan käyttäen Lemman 5.2 tekniikoita ja ehto $\Phi_*([A,B]) = [\Phi_*(A), \Phi_*(B)]$ käyttäen Lauseen 5.12 tekniikkaa.

(i) $\Phi_*(A+B) = \Phi_*(A) + \Phi_*(B)$:

Olkoot $A, B \in \mathfrak{g}$ ja α sekä β vastaavat derivoituvat käyrät G:ssä. Tällöin $\Phi \circ \alpha$ ja $\Phi \circ \beta$ ovat derivoituvia käyriä H:ssa,

$\Phi \circ \alpha(0) = \Phi(I) = I = \Phi \circ \beta(0)$ ja

$$\Phi_*(A+B) = \Phi_*\left(\frac{d}{dt}\alpha(t)\beta(t)\Big|_{t=0}\right) = \frac{d}{dt}\Phi(\alpha(t)\beta(t))\Big|_{t=0}$$

$$\overset{\Phi \text{ homom}}{=} \frac{d}{dt}\Phi(\alpha(t))\Phi(\beta(t))\Big|_{t=0} = \frac{d}{dt}\Phi(\alpha(t))\Big|_{t=0} + \frac{d}{dt}\Phi(\beta(t))\Big|_{t=0}$$

$$= \Phi_*(A) + \Phi_*(B)$$

(ii) $\Phi_*(\lambda A) = \lambda \Phi_*(A)$:

$\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $A \in \mathfrak{g}$

$$\Phi_*(\lambda A) = \Phi_*\left(\frac{d}{dt}\alpha(\lambda t)\Big|_{t=0}\right) = \frac{d}{dt}\Phi \circ \alpha(\lambda t)\Big|_{t=0} = \lambda \frac{d}{dt}\Phi \circ \alpha(t)\Big|_{t=0} = \lambda \Phi_*(A)$$

(iii) $\Phi_*([A,B]) = [\Phi_*(A), \Phi_*(B)]$:

$$\Phi_*([A,B]) = \Phi_*\left(\lim_{t\to 0} \frac{\frac{d}{ds}\alpha(t)\beta(s)\alpha(t)^{-1}\beta(s)^{-1}\big|_{s=0}}{t}\right)$$

$$\overset{\Phi \text{ jva hom.}}{=} \lim_{t\to 0} \frac{\Phi_*\left(\frac{d}{ds}\alpha(t)\beta(s)\alpha(t)^{-1}\beta(s)^{-1}\big|_{s=0}\right)}{t}$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{\frac{d}{ds}(\Phi\circ\alpha(t))(\Phi\circ\beta(s))(\Phi\circ\alpha(t))^{-1}(\Phi\circ\beta(s))^{-1}\big|_{s=0}}{t}$$

$$= [\Phi_*(A), \Phi_*(B)]$$

$\square$

TO 15.2
5

Vaikka määr 6.5 puhuu vain käyristä identiteettimatriisin läpi, homomorfismiominaisuutta käyttäen saadaan lauseke mielivaltaisen derivoituvan käyrän kuvan derivaatalle.

Lause 6.7

Olkoon $\Phi : G \to H$ derivoituva homomorfismi ja $\Phi_* : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ sen derivaatta.
Olkoon $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \to G$ derivoituva käyrä. Tällöin $\forall t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$

$$\frac{d}{dt} \Phi \circ \alpha(t) = \Phi(\alpha(t)) \, \Phi_*(\alpha(t)^{-1} \alpha'(t))$$

Tod

Huomaa, että $\alpha'(t) \in T_{\alpha(t)} G$, joten $\alpha(t)^{-1} \alpha'(t) \in T_I G = \mathfrak{g}$, joten ylläoleva lauseke on mielekäs.

Määritelmän 6.5 käyttämiseksi kiinnitetään $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ ja määritellään

$$\beta : (-\varepsilon - t, \varepsilon - t) \to G, \quad \beta(s) = \alpha(t)^{-1} \alpha(t+s)$$

Tällöin β on derivoituva käyrä, $\beta(0) = \alpha(t)^{-1} \alpha(t) = I$ ja

$$\beta'(0) = \frac{d}{ds} \alpha(t)^{-1} \alpha(t+s) \Big|_{s=0} = \alpha(t)^{-1} \frac{d}{ds} \alpha(t+s) \Big|_{s=0} = \alpha(t)^{-1} \alpha'(t).$$

Määr 6.5 mukaan

$$\Phi_*(\beta'(0)) = \frac{d}{ds} \Phi \circ \beta(s) \Big|_{s=0} = \frac{d}{ds} \Phi\left(\alpha(t)^{-1} \alpha(t+s)\right) \Big|_{s=0}$$

$$\overset{\Phi \text{ hom}}{=} \Phi(\alpha(t))^{-1} \frac{d}{ds} \Phi(\alpha(t+s)) \Big|_{s=0}$$

$$= \Phi(\alpha(t))^{-1} \frac{d}{dt} \Phi(\alpha(t))$$

Tästä saadaan Lauseen väite kertomalla $\Phi(\alpha(t))$:llä:

$$\frac{d}{dt} \Phi \circ \alpha(t) = \Phi(\alpha(t)) \, \Phi_*(\beta'(0)) = \Phi(\alpha(t)) \, \Phi_*(\alpha(t)^{-1} \alpha'(t)) \qquad \square$$

Lien teorian kannalta tärkeä eksponenttiaalin ominaisuus on seuraava fakta;

Fakta

Olkoon G matriisiryhmä ja $\mathfrak{g}$ sen Lien algebra.
Tällöin $\exp(\mathfrak{g}) \subset G$.

Tämän faktan todistaminen vaatii enemmän differentiaaligeometrisiä tarkasteluja kuin tällä kurssilla ehditään käsitellä, mutta otetaan se siitä huolimatta käyttöön.

Huomaa, että monien konkreettisten matriisiryhmien kanssa väite pystytään todistamaan suoraan, kuten teimme esim. $GL(n,\mathbb{K})$, $SL(n,\mathbb{K})$, $O(n)$, $SO(n)$, $U(n)$, $SU(n)$ tapauksissa.

Eksponenttiaali toimii linkkinä algebran ja ryhmän välillä!

Lause 6.8

Olkoon $\Phi : G \to H$ derivoituva homomorfismi ja $\Phi_* : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ sen derivaatta.
Tällöin $\exp \circ \Phi_* = \Phi \circ \exp$,

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{g} \arrow[r, "\Phi_*"] \arrow[d, "\exp"] & \mathfrak{h} \arrow[d, "\exp"] \\ G \arrow[r, "\Phi"] & H \end{tikzcd}$$

Tod

Olkoon $A \in \mathfrak{g}$. Tarkastellaan käyriä

$$\beta : \mathbb{R} \to H, \qquad \beta(t) = \exp \circ \Phi_*(tA) = \exp(t\,\Phi_*(A))$$
$$\gamma : \mathbb{R} \to H, \qquad \gamma(t) = \Phi \circ \exp(tA)$$

Nämä ovat derivoituvia käyriä, ja

$$\frac{d}{dt}\beta(t) = \exp(t\,\Phi_* A) \cdot \Phi_* A = \beta(t) \cdot \Phi_*(A),$$
$$\frac{d}{dt}\gamma(t) \overset{\text{Lause 6.7}}{=} \Phi(\exp tA)\, \Phi_*(\exp(-tA) \cdot \exp(tA) \cdot A) = \gamma(t)\, \Phi_*(A),$$

eli ne toteuttavat saman lineaarisen differentiaaliyhtälön.

Lisäksi $\beta(0) = \exp(\Phi_* 0) = \exp(0) = I$ ja
$\gamma(0) = \Phi(\exp(0)) = \Phi(I) = I$,

joten $\beta(t) = \gamma(t)\ \forall t \in \mathbb{R}$ $\square$