Lause 6.9

Olkoon G matriisiryhmä ja $\mathfrak{g}$ sen Lien algebra.
Tällöin $\langle \exp(\mathfrak{g}) \rangle < G$.
Lisäksi, jos G on polkuyhtenäinen, $\langle \exp(\mathfrak{g}) \rangle = G$.

Tässä notaatiolla $\langle X \rangle$ tarkoitetaan joukon X virittämää aliryhmää

$$\langle X \rangle = \{ x_1 x_2 \cdots x_n : \quad x_j \in X \ \forall j \in \{1, \ldots, n\},\ n \in \mathbb{N} \}$$

Lauseen jälkimmäistä väitettä varten todistetaan hieman yleisempi aputulos

Lemma 6.10

Olkoon G polkuyhtenäinen matriisiryhmä ja $U \subset G$ jokin avoin joukko jolle $I \in U$.
Tällöin $\langle U \rangle = G$.

Tod

Olkoon $\alpha : [0,1] \to G$ polku jolle $\alpha(0) = I$.
Riittää osoittaa että $\alpha(t) \in \langle U \rangle \quad \forall t$.
Tarkastellaan joukkoa

$$X = \{ t \in [0,1] : \quad \alpha(s) \in \langle U \rangle \ \forall s \leq t \}$$

koska $I = \alpha(0) \in U \subset \langle U \rangle$, ~~Polun α jatkuvuuden nojalla~~
ainakin $0 \in X$, eli $X \neq \emptyset$.

Olkoon $t \in X \subset [0,1]$, jolloin $\alpha(t) \in \langle U \rangle$, eli $\alpha(t) = u_1 \cdots u_n$, $u_1, \ldots, u_n \in U$.
Tällöin $\alpha(t) \in u_1 \cdots u_n U \subset \langle U \rangle$ ja joukko $u_1 \cdots u_n U$ on avoin kuvauksen $F : G \to G$, $F(h) = (u_1 \cdots u_n)^{-1} h$ alkukuvana avoimesta joukosta U.
Polun α jatkuvuuden nojalla $\alpha(t + \varepsilon) \in u_1 \cdots u_n U$ riittävän pienille $\varepsilon > 0$.
$\Rightarrow$ joukolla X ei voi olla ylärajaa $t < 1$ $\Rightarrow \max X = 1 \Rightarrow \alpha(t) \in \langle U \rangle \ \forall t$ $\square$

Lauseen 6.9 tod

Hyväksymme aiemmin käyttöön faktan $\exp(\mathfrak{g}) \subset G$.
Tästä seuraa välittömästi että että $\langle \exp(\mathfrak{g}) \rangle \subset G$,
joten koska $\langle \exp(\mathfrak{g}) \rangle$ on ryhmä, se on G:in aliryhmä.

Lauseen jälkimmäistä väitettä varten hyödynnetään Lemmaa 4.8, jonka mukaan

$$\{A \in GL(n, \mathbb{K}) : \|A - I\| < 1\} \subset \exp(\mathfrak{gl}(n, \mathbb{K})) \subset GL(n, \mathbb{K}).$$

Rajoittamalla tämä osajoukkoon G, saadaan

$$\{A \in G : \|A - I\| < 1\} \subset \exp(\mathfrak{g}) \subset G.$$

Nyt oletuksen mukaan G on polkuyhtenäinen ja

$$U = \{A \in G : \|A - I\| < 1\}$$

on avoin joukko (HT), jolle $I \in U$.

Lemma 6.10 $\Rightarrow$ $G = \langle U \rangle \subset \langle \exp(\mathfrak{g}) \rangle$. $\square$

Huom

Kun $\|A - I\| < 1$, $A \in GL(n, \mathbb{K})$ voidaan Lemman 4.8 nojalla kirjoittaa muodossa
$A = \exp(X)$ jollekin $X \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{K})$.

Näin ollen jos $\|X\|$ ja $\|Y\|$ ovat riittävän pienet, että $\|\exp(X)\exp(Y) - I\| < 1$, niin

$$\exp(X)\exp(Y) = \exp(Z) \quad \text{jollekin } Z \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{K}).$$

Itse asiassa Z:lle on eksplisiittinen lauseke, ns. Baker–Campbell–Hausdorff kaava, joka antaa Z:n X:n ja Y:n iteroitujen Lien sulkeiden funktiona

$$Z = X + Y + \tfrac{1}{2}[X, Y] + \ldots \text{3. 4. 5.} \ldots \text{ kertaluvun sulkeita} \ldots$$

Joissakin tapauksissa tämä lauseke suppenee kaikilla $X, Y \in \mathfrak{g}$ ja saadaan

$$\langle \exp(\mathfrak{g}) \rangle = \exp(\mathfrak{g}) = G,$$

ja itse asiassa $\exp : \mathfrak{g} \to G$ voi olla tällaisessa tilanteessa jopa diffeomorfismi.

Näin käy esimerkiksi kun $\mathfrak{g}$ on "nilpotentti" eli kun iteroidut Lien sulkeet ovat 0 jostakin kertaluvusta alkaen.

7. Yksinkertaiset Lien ryhmät ja algebrat

Määritelmä 7.1

- Ryhmä G on <u>yksinkertainen</u>, jos sen ainoat normaalit aliryhmät ovat $\{e_G\}$ ja G.
- Yhtenäinen epäkommutatiivinen matriisiryhmä (tai yleisemmin Lien ryhmä) G on <u>yksinkertainen</u> jos sen ainoat $\boxed{\text{yhtenäiset}}$ normaalit aliryhmät ovat $\{I\}$ ja G.
- Epäkommutatiivinen Lien algebra $\mathfrak{g}$ on <u>yksinkertainen</u> jos sen ainoat ideaalit ovat $\{0\}$ ja $\mathfrak{g}$.

"Yksinkertaisuuden" idea on että rakennetta ei voida yksinkertaistaa millään homomorfismilla $G \to H$ jonnekin muualle.

Jos G on yksinkertainen ja $\varphi : G \to H$ on homomorfismi, niin joko

1) $\ker\varphi = \{e_G\} \triangleleft G \Rightarrow \varphi : G \to \varphi(G)$ on isomorfismi ja $\varphi(G)$ on yhtä hankala kuin G, tai
2) $\ker\varphi = G \Rightarrow \varphi : G \to \{e_H\}$ hävittää kaiken informaation

Lien ryhmien/algebrojen tapauksessa määritelmään lisätään yhtenäisyys-rajoite jotta saadaan vastaavuus

$$G \text{ yksinkertainen} \iff \mathfrak{g} \text{ yksinkertainen}$$

Tämän lisäksi yksinkertaisten Lien algebrojen luokittelua varten lisätään epäkommutatiivisuus-vaatimus ($\Rightarrow \mathbb{R}$ ei ole yksinkertainen Lien algebra). Vertaa: 1 ei ole alkuluku.

Yksinkertaisuuden puuttuminen matriisiryhmän tai sen Lien algebrassa näkyy normaali aliryhmä $\leftrightarrow$ ideaali vastaavuuden kautta.
Tässä hyödyllinen aputulos on:

Lemma 7.2

Olkoon $\varphi: G \to H$ derivoituva homomorfismi matriisiryhmien välillä
ja $\varphi_*: \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ sen derivaatta.
Tällöin matriisiryhmän $\ker \varphi \triangleleft G$ Lien algebra on $\ker \varphi_* \triangleleft \mathfrak{g}$.

Tod
HT

Esim 7.3

$GL(n, \mathbb{K})$ ei ole yksinkertainen: $SL(n, \mathbb{K})$ on normaali yhtenäinen epätriviaali aliryhmä.

Lemma 7.2 $\overset{\varphi = \det}{\Rightarrow}$ $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{K}) \triangleleft \mathfrak{gl}(n, \mathbb{K})$ on epätriviaali ideaali.
$\Rightarrow$ $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{K})$ ei ole yksinkertainen.

Lause 7.4

$SL(n, \mathbb{C})$ on yksinkertainen kaikilla $n \geq 2$.

Tod

Matriisit E^{rs}, $r \neq s$, ja $E^{jj} - E^{nn}$, $j = 1, \dots, n-1$ muodostavat $SL(n, \mathbb{C}) = \{A : \operatorname{tr} A = 0\}$:n kannan.

Olkoon $I \triangleleft SL(n, \mathbb{C})$ epätriviaali ideaali. Osoitetaan, että $I = SL(n, \mathbb{C})$. Olk $X \in I \setminus \{0\}$

Matriisin E^{rs} ainoa nollasta eroava alkio on rivillä r sarakkeella s.

$\Rightarrow$ Matriisin XE^{rs} ainoa nollasta eroava sarake on s, ja tämä sarake on X:n r sarake

Vastaavasti matriisin $-E^{rs}X$ ainoa nollasta eroava rivi on r, joka on X:n s rivi -1:llä kerrottuna

$$\Rightarrow [X, E^{rs}] = XE^{rs} - E^{rs}X = \begin{array}{cc} & \\ \text{rivi } r \to & \begin{bmatrix} 0 & x_{1r} & 0 \\ & \vdots & \\ & x_{s-1,r} & \\ -x_{s1} \cdots -x_{s,s-1} & x_{rr} - x_{ss} & -x_{s,s+1} \cdots -x_{sn} \\ & x_{s+1,r} & \\ & \vdots & \\ 0 & x_{nr} & 0 \end{bmatrix} \\ & \uparrow \\ & \text{sarake } s \end{array}$$

Tapaus (i): $X_{sr} \neq 0$ jollekin $r \neq s$

Toistamalla edellä tarkastelu,

$$[[X, E^{rs}], E^{rs}] = \underbrace{[X, E^{rs}]E^{rs}}_{\substack{\text{siirtää sarakkeen} \\ r \to s}} - \underbrace{E^{rs}[X, E^{rs}]}_{\substack{\text{siirtää rivin} \\ s \to r}}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ & 0 & \\ & -x_{s,r} & \\ 0 & 0 & \\ & \vdots & \\ & 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ 0 \cdots 0 & x_{s,r} & 0 \cdots 0 \\ 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & -2x_{s,r} & \end{bmatrix} \cancel{= -2x_{sr}E^{rs}}$$

$$= -2X_{sr} E^{rs}$$

$\Rightarrow E^{rs} \in I$. $\Rightarrow [[E^{rs}, E^{sr}], E^{sr}] = -2E^{sr} \in I$

Tästä saadaan edelleen loput $SL(n, \mathbb{C})$:n kannan alkiot, sillä

$$[E^{ab}, E^{bc}] = \begin{cases} E^{ac}, & a \neq c \\ E^{aa} - E^{bb}, & a = c \end{cases}$$

Tapaus (ii) $X_{sr}=0 \quad \forall r\neq s$:

TI 272

6

Nyt

$$X = \begin{bmatrix} x_{11} & & & \\ & x_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & x_{nn} \end{bmatrix}$$

ja $\operatorname{tr} X = \sum x_{kk} = 0$.

Oletuksen mukaan $X \neq 0$, joten on olemassa j, k jolle $x_{jj} - x_{kk} \neq 0$,
(sillä muutoin $\operatorname{tr} X = \sum_k x_{kk} = n \cdot x_{11} = 0 \Rightarrow x_{11} = \ldots = x_{nn} = 0$)

Tällöin

$$[X, E^{jk}] = (x_{jj} - x_{kk}) E^{jk}$$

$\Rightarrow E^{jk} \in I$.

$\Rightarrow I = \mathfrak{sl}(n, \mathbb{K})$ kuten (i)-kohdassa. $\square$