Seuraus 7.5

TO 1.3

1

$SU(n)$ on yksinkertainen kaikilla $n \geq 2$

Tod

Lauseen 5.23 nojalla $SU(n)_{\mathbb{C}} = SL(n;\mathbb{C})$. Itse asiassa

$SL(n,\mathbb{C}) = SU(n) + i \cdot SU(n)$

ja esitys $A \in SL(n,\mathbb{C}) \rightsquigarrow A = B + iC,\quad B, C \in SU(n)$

on yksikäsitteinen.

Jos $I \triangleleft SU(n)$ on epätriviaali ideaali, niin $h = I + iI$ on epätriviaali ideaali $SL(n,\mathbb{C})$:ssä:

(i) h on $\mathbb{C}$-vektoriavaruus:

Jos $A, B \in I$ ja $C, D \in I$, niin

$$(A+iB) + (C+iD) = (A+C) + i(B+D) \in h$$

ja jos $A, B \in I$, $c+id \in \mathbb{C}$, niin

$$(c+id)(A+iB) = (cA - dB) + i(cB + dA) \in h$$

(ii) $[h, SL(n,\mathbb{C})] \subset h$:

Jos $A+iB \in h$ ja $C+iD \in SL(n,\mathbb{C})$, niin

$$[A+iB, C+iD] = (A+iB)(C+iD) - (C+iD)(A+iB)$$

$$\cancel{= [C,A] - [D,B] + i([D,A]}$$

$$= [A,C] - [B,D] + i([A,D] + [B,C])$$

Koska I on ideaali, $[A,C], [B,D], [A,D], [B,C] \in I$

ja $A, B \in I$

$\Rightarrow [A+iB, C+iD] \in h$. $\square$

Soveltamalla Lauseen 7.4 strategiaa $\mathfrak{so}(n)$:n kantamatriiseihin

$$F^{rs} = E^{rs} - E^{sr}$$

voidaan osoittaa että $\mathfrak{so}(n)$ on yksinkertainen kun $n > 4$.
kun $n \leq 4$ ei ole riittävästi tilaa rivien/sarakkeiden nollaamiseen.

Erillisellä tarkastelulla voidaan kuitenkin osoittaa, että ~~$\mathfrak{so}(2)$ ja $\mathfrak{so}(3)$~~
$\mathfrak{so}(3)$ on yksinkertainen. (Huom $\mathfrak{so}(2) \simeq \mathbb{R}$ ei ole yksinkertainen)

Lause 7.6

$\mathfrak{so}(4)$ ei ole yksinkertainen.

"Tod"

Demoissa 4 tarkasteltiin homomorfismia

$$\Phi : SU(2) \times SU(2) \to SO(4) \qquad \Phi(q,p) = qxp^{-1}$$

missä $\mathbb{R}^4$ samaistettiin kvaternioiden $\mathbb{H}$ kanssa.
Tälle $\ker \Phi = \{\pm I\}$ on diskreetti, joten Φ_* on injektio (HT)

Itse asiassa voidaan osoittaa että Φ on surjektio,
jolloin $\Phi_* : \mathfrak{su}(2) \times \mathfrak{su}(2) \to \mathfrak{so}(4)$ on isomorfismi,

kääntämällä tämä kuvaus saadaan epätriviaali ~~homomorfismi~~
Lien algebrojen morfismi

$$\mathfrak{so}(4) \xrightarrow{\Phi_*^{-1}} \mathfrak{su}(2) \times \mathfrak{su}(2) \xrightarrow{\pi_1} \mathfrak{su}(2)$$

projektiokuvauksen avulla. $\square$

Määritelmä 7.7

Ryhmän G keskus on

$$Z(G) = \{g \in G : \quad gh = hg \ \forall h \in G\}$$

Lause 7.8

Olkoon G polkuyhtenäinen matriisiryhmä jolla on diskreetti keskus.
Jos $H \triangleleft G$ on normaali epädiskreetti aliryhmä, niin $T_I H \neq \{0\}$.

Tod

Jos $Z(G)$ on diskreetti mutta H ei, on olemassa matriisin $I \in G$ riittävän pieni ympäristö (eli jolla $\delta < 1$)

$$U = \{A \in G : \ \|A - I\| < \delta\}$$

jolle $U \cap Z(G) = \{I\}$ ja ~~[illegible]~~ $U \cap H$ sisältää jonkin matriisin $B \neq I$.

Koska $B \notin Z(G)$ on olemassa jokin $A \in U$ jolle $AB \neq BA$.
Nimittäin jos tällaista $A \in U$ ei olisi, niin B kommutoisi kaikkien $A \in U$ ja edelleen myös kaikkien $A \in \langle U \rangle$ kanssa,
mutta Lemman 6.10 nojalla $\langle U \rangle = G$, jolloin olisi $B \in Z(G)$.

Oletuksen $\delta < 1$, nojalla $\|A - I\| < 1$, joten on olemassa $X \in \mathfrak{g}$ jolle $\exp(X) = A$.
Tarkastellaan polkua $\gamma : \mathbb{R} \to G$

$$\gamma(t) = \exp(tX) B \exp(-tX) B^{-1}.$$

Koska H on normaali aliryhmä ja $B \in H$, itse asiassa $\gamma(t) \in H \ \forall t$.
Näin ollen

$$\gamma'(0) = X - BXB^{-1} \in T_I H,$$

joten riittää osoittaa että $X - BXB^{-1} \neq 0$.

$$X - BXB^{-1} = 0 \Rightarrow X = BXB^{-1} \Rightarrow \underbrace{\exp(X)}_{=A} = \exp(BXB^{-1}) = B \underbrace{\exp(X)}_{A} B^{-1}$$

$$\Rightarrow A = BAB^{-1} \Rightarrow AB = BA \ ↯$$

Lause 7.9

Olkoon G polkuyhtenäinen matriisiryhmä ja $N \lhd G$ diskreetti.
Tällöin $N \subset Z(G)$.

Tod

$N \lhd G \Rightarrow BAB^{-1} \in N \quad \forall A \in N,\ B \in G.$

Koska kuvaus $\varphi_A : G \to N$, $B \mapsto BAB^{-1}$ on jatkuva,
mille tahansa polulle α G:ssä $\varphi_A \circ \alpha$ on polku N:ssä.
Koska N on diskreetti, $\varphi_A \circ \alpha$ on tällöin aina vakiopolku.

Toisaalta, koska G on polkuyhtenäinen, $\forall X \in G$ on polku $I \to X$

$\cancel{\Rightarrow \varphi(G) = \{I\} \Rightarrow BAB^{-1} = I}$

$\Rightarrow \varphi_A(G) = \{\varphi_A(I)\} = \{IAI^{-1}\} = \{A\}$

$\Rightarrow BA = AB \quad \forall B \in G \Rightarrow A \in Z(G)$ $\square$

Esim

$SO(n)$, $n > 4$, on yksinkertainen matriisiryhmä,
mutta on yksinkertainen ryhmä vain jos n on pariton.

Todetaan ensin, että $Z(SO(n))$ on diskreetti:

Jos $Z(SO(n))$ ei olisi diskreetti, on

$Z(SO(n)) \cap \{A \in SO(n) : \|A - I\| < 1\} \neq \{I\}$

joten löytyy $X \in \mathfrak{so}(n)$ jolle $\exp(tX) \in Z(SO(n))$ ja $t \neq 0$

Tällöin $[X, Y] = 0 \quad \forall Y \in \mathfrak{so}(n)$ (HT)

Toisaalta $\underbrace{\{X : [X,Y]=0 \ \forall Y \in \mathfrak{so}(n)\}}_{= Z(\mathfrak{so}(n))}$ on $\mathfrak{so}(n)$:n ideaali (HT)

joten $\mathfrak{so}(n)$:n yksinkertaisuus $\cancel{\Rightarrow Z(\mathfrak{g}) = Z(\mathfrak{so}(n))}$

$\Rightarrow Z(\mathfrak{so}(n)) = \mathfrak{so}(n)$, mikä on ristiriita sen kanssa

että $\mathfrak{so}(n)$ ei ole abelinen.

Näin ollen $Z(SO(n))$ on diskreetti ja voidaan soveltaa Lausetta 7.8.

TO 1.3

5

Jos $N \triangleleft \overset{SO(n)}{\cancel{G}}$ on yhtenäinen ja $N \neq \{I\}$,

L. 7.8 $\Rightarrow$ $T_I N \neq \{0\}$

ja toisaalle $T_I N \triangleleft so(n)$ $\Rightarrow T_I N = so(n)$.

Tällöin $N \supset \exp(T_I N) = \exp(so(n))$ ja

~~Lauseen~~ 6.10 nojalla $\langle \exp(so(n)) \rangle = SO(n)$.
Lemman

$\Longrightarrow$ $N = SO(n)$,

eli epätriviaalia yhtenäistä normaalia aliryhmää ei ole.

Kuitenkin jos n on parillinen, $\{\pm I\} \triangleleft SO(n)$ on epätriviaali epäyhtenäinen normaali aliryhmä, joten tällöin $SO(n)$ ei ole ryhmänä yksinkertainen.