

**MATS132 Lineaariset Lien ryhmät demo 1 (17.01.2018)**

1. Osoita, että  $GL^+(n, \mathbb{R}) = \{A \in GL(n, \mathbb{R}) : \det A > 0\}$  on matriisiryhmä.
2. Osoita, että kuvaus

$$(\mathbb{K}, +) \rightarrow GL(2, \mathbb{K}) : a \mapsto \begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

on injektiivinen jatkuva homomorfismi.

3. (a) Osoita, että matriiseille  $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ ,

$$AB = I \iff BA = I.$$

- (b) Olkoon  $m \geq n$ . Osoita, että kaikille  $A \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$  ja  $B \in \mathcal{M}_{n \times m}(\mathbb{K})$

$$AB = I \implies BA = I.$$

- (c) Osoita, että (b)-kohdan käänteinen väite “ $\Leftarrow$ ” ei aina päde.

4. Todista Lemma 2.17: Olkoon  $\Psi : GL(n, \mathbb{C}) \hookrightarrow GL(2n, \mathbb{R})$  luennoilla käytetty kompleksisen matriisin reaaliupotus, jossa jokainen matriisin alkio  $a + bi \in \mathbb{C}$  korvataan  $2 \times 2$  matriisilla  $\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$  ja olkoon

$$\Phi : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{R}^{2n}, \Phi(c_1 + d_1i, \dots, c_n + d_ni) = \Phi(c_1, d_1, c_2, d_2, \dots, c_n, d_n).$$

Osoita, että lineaarikuvauksille  $A : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$  ja  $\Psi(A) : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$

$$\Psi(A) \circ \Phi = \Phi \circ A \quad \begin{array}{ccc} \mathbb{C}^n & \xrightarrow{\Phi} & \mathbb{R}^{2n} \\ \downarrow A & & \downarrow \Psi(A) \\ \mathbb{C}^n & \xrightarrow{\Phi} & \mathbb{R}^{2n} \end{array}$$

**Käännä**

Tarkistellaan matriisiryhmän luonnollista toimintaa vektoriavaruuteen. Olkoon

$$\varphi : \text{GL}(n, \mathbb{K}) \times \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^n, \quad \varphi(A, x) = Ax.$$

**5.** Osoita, että  $\varphi$  on matriisiryhmän  $\text{GL}(n, \mathbb{K})$  jatkuva toiminto vektoriavaruuteen  $\mathbb{K}^n$ . Toisin sanoen osoita, että

- (i)  $\varphi$  on jatkuva kuvaus,
- (ii)  $\varphi(I, x) = x$  ja
- (iii)  $\varphi(AB, x) = \varphi(A, \varphi(B, x))$ .

**6.** Määritä kaikkien vektorien  $x \in \mathbb{K}^n$  radat

$$\text{Orb}(x) = \varphi(\text{GL}(n, \mathbb{K}), x) = \{Ax : A \in \text{GL}(n, \mathbb{K})\} \subset \mathbb{K}^n.$$

Montako eri rataa on?

Kiinnitetään vektori  $x \in \mathbb{K}^n$ . Seuraavissa tehtävissä tarkastellaan vakauttajaa

$$\text{Stab}(x) = \{A \in \text{GL}(n, \mathbb{K}) : Ax = x\}.$$

**7.** Osoita, että  $\text{Stab}(x) \subset \text{GL}(n, \mathbb{K})$  on matriisiryhmä.

**8.** Anna esimerkki matriisiryhmästä  $H < \text{Stab}(x)$ , jolle  $H \simeq \text{GL}(n-1, \mathbb{K})$ .