MATS132 Lineaariset Lien ryhmät demo 1 malliratkaisut

1. Osoita, että $\mathrm{GL}^+(n,\mathbb{R}) = \{A \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{R}) : \det A > 0\}$ on matriisiryhmä.

Todistus. $\mathrm{GL}^+(n,\mathbb{R})$ on aliryhmä, sillä

(i) $\det(I) = 1 > 0 \implies I \in \mathrm{GL}^+(n,\mathbb{R})$ ja

(ii)

$$\begin{aligned} A, B \in \mathrm{GL}^+(n,\mathbb{R}) &\implies \det(A), \det(B) > 0 \\ &\implies \det(AB^{-1}) = \det(A)\det(B^{-1}) = \frac{\det(A)}{\det(B)} > 0 \\ &\implies AB^{-1} \in \mathrm{GL}^+(n,\mathbb{R}). \end{aligned}$$

$\mathrm{GL}^+(n,\mathbb{R}) \subset \mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ on suljettu, sillä $\mathrm{GL}^+(n,\mathbb{R}) = \det^{-1}(\{x \in \mathbb{R} : x > 0\})$ ja väli $(0,\infty)$ on suljettu $\mathbb{R} \setminus \{0\}$:n osajoukkona. $\square$

2. Osoita, että kuvaus

$$(\mathbb{K}, +) \to \mathrm{GL}(2,\mathbb{K}) : \quad a \mapsto \begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

on injektiivinen jatkuva homomorfismi.

Todistus. Injektiivisyys: $\begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \iff a = b.$

Jatkuvuus: Komponenttikuvaukset ovat joko vakiokuvauksia $a \mapsto 1$ tai $a \mapsto 0$, tai identtinen kuvaus $a \mapsto a$.

Homomorfismi:

$$\begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & a+b \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

$\square$

3. (a) Osoita, että matriiseille $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$,

$$AB = I \iff BA = I.$$

(b) Olkoon $m \geq n$. Osoita, että kaikille $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ ja $B \in \mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{K})$

$$AB = I \implies BA = I.$$

(c) Osoita, että (b)-kohdan käänteinen väite "$\Longleftarrow$" ei aina päde.

Todistus. (a) Oletetaan, että $AB = I$. Tällöin

$$B = BI = BAB \implies I = BB^{-1} = BABB^{-1} = BA.$$

(b) Tarkastellaan väitettä $AB = I$ tulkitsemalla matriisit lineaarikuvauksina.

$$\begin{tikzcd} \mathbb{K}^m \arrow[r, "B"] \arrow[dr, "AB=I"'] & \mathbb{K}^n \arrow[d, "A"] \\ & \mathbb{K}^m \end{tikzcd}$$

Koska $I : \mathbb{K}^m \to \mathbb{K}^m$ on surjektio, myös kuvauksen $A : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ on oltava surjektio. Koska $n \leq m$, kuvauksen A on oltava tällöin bijektio, eli itse asiassa $m = n$, ja väite seuraa (a)-kohdasta.

(c) Olkoon $n = 1$ ja $m = 2$, $A = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ ja $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$. Tällöin

$$\begin{aligned} BA &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix} = I_m, \text{ mutta} \\ AB &= \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \neq I_n. \end{aligned}$$

□

4. Todista Lemma 2.17: Olkoon $\Psi : \mathrm{GL}(n, \mathbb{C}) \hookrightarrow \mathrm{GL}(2n, \mathbb{R})$ luennoilla käytetty kompleksisen matriisin reaaliupotus, jossa jokainen matriisin alkio $a + bi \in \mathbb{C}$ korvataan 2×2 matriisilla $\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$ ja olkoon

$$\Phi : \mathbb{C}^n \to \mathbb{R}^{2n}, \Phi(c_1 + d_1 i, \ldots, c_n + d_n i) = \Phi(c_1, d_1, c_2, d_2, \ldots, c_n, d_n).$$

Osoita, että lineaarikuvauksille $A : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ ja $\Psi(A) : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^{2n}$

$$\Psi(A) \circ \Phi = \Phi \circ A \qquad \begin{tikzcd} \mathbb{C}^n \arrow[r, "\Phi"] \arrow[d, "A"] & \mathbb{R}^{2n} \arrow[d, "\Psi(A)"] \\ \mathbb{C}^n \arrow[r, "\Phi"] & \mathbb{R}^{2n} \end{tikzcd}$$

Todistus. Matriisin $\Psi(A)$ parittomat rivit $2r - 1$ ovat muotoa

$$\begin{bmatrix} \mathrm{Re}(A_{r1}) & -\mathrm{Im}(A_{r1}) & \ldots & \mathrm{Re}(A_{rn}) & -\mathrm{Im}(A_{rn}) \end{bmatrix}$$

ja parilliset rivit $2r$ muotoa

$$\begin{bmatrix} \mathrm{Im}(A_{r1}) & \mathrm{Re}(A_{r1}) & \ldots & \mathrm{Im}(A_{rn}) & \mathrm{Re}(A_{rn}) \end{bmatrix}.$$

Näin ollen mille tahansa $z = (c_1 + d_1 i, \ldots, c_n + d_n i) \in \mathbb{C}^n$, vektorin $w = \Psi(A) \circ \Phi(z)$ komponentit $2r - 1$ ja $2r$ ovat

$$\begin{aligned} w_{2r-1} &= \sum_{k=1}^{n} \Big(\mathrm{Re}(A_{rk}) c_k - \mathrm{Im}(A_{rk}) d_k \Big) = \mathrm{Re} \Big(\sum_{k=1}^{n} A_{rk} \cdot (c_k + d_k i) \Big) \text{ ja} \\ w_{2r} &= \sum_{k=1}^{n} \Big(\mathrm{Im}(A_{rk}) c_k + \mathrm{Re}(A_{rk}) d_k \Big) = \mathrm{Im} \Big(\sum_{k=1}^{n} A_{rk} \cdot (c_k + d_k i) \Big). \end{aligned}$$

Nämä ovat täsmälleen vektorin $\Phi \circ A(c_1 + d_1 i, \ldots, c_n, d_n i)$:n vastaavat komponentit. □

Tarkistellaan matriisiryhmän luonnollista toimintaa vektoriavaruuteen. Olkoon

$$\varphi : \mathrm{GL}(n, \mathbb{K}) \times \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n, \quad \varphi(A, x) = Ax.$$

5. Osoita, että φ on matriisiryhmän $\mathrm{GL}(n, \mathbb{K})$ jatkuva toiminto vektoriavaruuteen $\mathbb{K}^n$. Toisin sanoen osoita, että

(i) φ on jatkuva kuvaus,

(ii) $\varphi(I, x) = x$ ja

(iii) $\varphi(AB, x) = \varphi(A, \varphi(B, x))$.

Todistus. (i) Matriisitulon määritelmän nojalla jokainen kuvauksen $(A, x) \mapsto Ax$ komponentti on polynomi, ja siten jatkuva.

(ii) $\varphi(I, x) = Ix = x$.

(iii) $\varphi(AB, x) = ABx = A(Bx) = \varphi(A, Bx) = \varphi(A, \varphi(B, x))$.

□

6. Määritä kaikkien vektorien $x \in \mathbb{K}^n$ radat

$$\mathrm{Orb}(x) = \varphi(\mathrm{GL}(n, \mathbb{K}), x) = \{Ax : \ A \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{K})\}.$$

Montako eri rataa on?

Todistus. Jos $x = 0$, niin $Ax = 0$ kaikille $A \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{K})$, joten $\mathrm{Orb}(0) = \{0\}$. Jos taas $x \neq 0$, niin mille tahansa $y \in \mathbb{K}^n$, $y \neq 0$ on olemassa lineaarikuvaus $A : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$, jolle $Ax = y$. Tämä nähdään esimerkiksi laajentamalla x kannaksi $x, x_2, \ldots, x_n$ ja y kannaksi $y, y_2, \ldots, y_n$ ja määrittelemällä

$$A = \begin{bmatrix} y & y_2 & \ldots & y_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & x_2 & \ldots & x_n \end{bmatrix}^{-1}.$$

Tälle matriisille

$$Ax = \begin{bmatrix} y & y_2 & \ldots & y_n \end{bmatrix} e_1 = y.$$

Näin ollen $\mathrm{Orb}(x) = \mathbb{K}^n \setminus \{0\}$. Ratoja on siis vain nämä 2. □

Kiinnitetään vektori $x \in \mathbb{K}^n$. Seuraavissa tehtävissä tarkastellaan vakauttajaa

$$\mathrm{Stab}(x) = \{A \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{K}) : \ Ax = x\}.$$

7. Osoita, että $\mathrm{Stab}(x) \subset \mathrm{GL}(n, \mathbb{K})$ on matriisiryhmä.

Todistus. Tarkistetaan ensin, että vakauttaja on aliryhmä. Koska $Ix = x$, ainakin $I \in \mathrm{Stab}(x)$. Lisäksi, jos $A, B \in \mathrm{Stab}(x)$, niin $AB^{-1}x = Ax = x$, joten $AB^{-1} \in \mathrm{Stab}(x)$.

Tarkastetaan sitten, että vakauttaja on suljettu. Olkoon $A_k \in \mathrm{Stab}(x)$ jono, jolle $A_k \to A \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{K})$. Tällöin toiminnon φ jatkuvuuden nojalla $A_k x \to Ax$. Koska jono $A_k x$ on vain vakiojono $A_k x = x$, tästä seuraa, että $Ax = x$, eli $A \in \mathrm{Stab}(x)$. □

8. Anna esimerkki matriisialiryhmästä $H < \mathrm{Stab}(x)$, jolle $H \simeq \mathrm{GL}(n-1, \mathbb{K})$.

Todistus. Jos $x = 0$, $\mathrm{Stab}(x) = \mathrm{GL}(n, \mathbb{K})$, ja upotus $\mathrm{GL}(n-1, \mathbb{K}) \hookrightarrow \mathrm{GL}(n, \mathbb{K})$ antaa halutun matriisialiryhmän.

Jos taas $x \neq 0$, niin on olemassa $n-1$ muuta vektoria $y_1, \ldots, y_{n-1}$ siten, että $y_1, \ldots, y_{n-1}, x$ on vektoriavaruuden $\mathbb{K}^n$ kanta. Muodostetaan näitä vektoreita sarakkeina käyttäen kannanvaihtomatriisi

$$U = \begin{bmatrix} y_1 & \ldots & y_{n-1} & x \end{bmatrix} \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{K}).$$

Tarkastellaan upotuksen $\mathrm{GL}(n-1, \mathbb{K}) \hookrightarrow \mathrm{GL}(n, \mathbb{K})$ antamaa matriisialiryhmää

$$\tilde{H} = \left\{ \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} : \; A \in \mathrm{GL}(n-1, \mathbb{K}) \right\} < \mathrm{GL}(n, \mathbb{K})$$

ja määritellään sen avulla matriisialiryhmä

$$H = U\tilde{H}U^{-1}.$$

H on aliryhmä, sillä $Uh_1U^{-1}Uh_2^{-1}U^{-1} = Uh_1h_2^{-1}U^{-1}$ kaikilla $h_1, h_2 \in H$. H on myös suljettu, sillä

$$H = U\tilde{H}U^{-1} \iff UHU^{-1} = \tilde{H},$$

joten H on alkukuva joukosta $\tilde{H}$ jatkuvalla kuvauksella $A \mapsto UAU^{-1}$.

Tarkistetaan, että $H < \mathrm{Stab}(x)$. Jokainen $A \in H$ on muotoa $A = U \begin{bmatrix} B & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} U^{-1}$ jollekin $B \in \mathrm{GL}(n-1, \mathbb{K})$. Näin ollen

$$Ax = U \begin{bmatrix} B & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} U^{-1}x = U \begin{bmatrix} B & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} e_n = Ue_n = x,$$

eli $A \in \mathrm{Stab}(x)$. $\square$