MATS132 Lineaariset Lien ryhmät demo 2 (24.01.2018)

1. Kvaternioiden kompleksinen matriisiesitys $\mathbb{H} \hookrightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ saatiin matriiseilla

$$\mathbf{1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{i} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{j} = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{bmatrix} \quad \text{ja} \qquad \mathbf{k} = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}.$$

(a) Tarkista kvaternioiden matriisiesitykselle relaatiot $\mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 = \mathbf{ijk} = -\mathbf{1}$.

(b) Osoita kvaternion $0 \neq q \in \mathbb{H}$ käänteisalkion kaava $q^{-1} = \bar{q}/|q|^2$.

2. Olkoon $\Psi : \mathrm{GL}(n, \mathbb{C}) \hookrightarrow \mathrm{GL}(2n, \mathbb{R})$ Lauseen 2.15 blokkimatriisiupotus.

(a) Osoita, että kaikille $A \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$, $\Psi(A^*) = \Psi(A)^T$.

(b) Osoita, että $\Psi(\mathrm{U}(n)) \subset \mathrm{O}(2n)$.

(c) Onko $\Psi(\mathrm{U}(n)) = \mathrm{O}(2n)$?

3. Todista Lause 3.8: Olkoot $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{K}^n$ lineaarisesti riippumattomia vektoreita ja $A = \begin{bmatrix} x_1 & \ldots & x_n \end{bmatrix} \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{K})$ niistä muodostettu matriisi. Osoita, että

$$A \in \begin{cases} \mathrm{O}(n), & \text{jos } \mathbb{K} = \mathbb{R} \\ \mathrm{U}(n), & \text{jos } \mathbb{K} = \mathbb{C} \end{cases} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{array}{l} \text{vektorit } x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{K}^n \text{ muodostavat} \\ \text{ortonormaalin kannan} \end{array}.$$

4. Olkoot G, $N \lhd G$, $H < G$ ja $K < G$ ryhmiä. Osoita, että jos $G = N \rtimes H$ ja $K = (N \cap K)(H \cap K)$, niin

$$K = (N \cap K) \rtimes (H \cap K).$$

5. Tulkitaan $\mathrm{O}(1) < \mathrm{O}(n)$ blokkiupotuksen $\mathrm{GL}(1, \mathbb{R}) \hookrightarrow \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ kautta.

(a) Osoita, että $\mathrm{O}(n) = \mathrm{SO}(n) \rtimes \mathrm{O}(1)$

(b) Osoita, että $\mathrm{O}(1)$ ei ole normaali aliryhmä $\mathrm{O}(n)$:lle.

Tarkastellaan ortogonaaliryhmän toimintoa $\varphi : \mathrm{O}(n) \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, \varphi(A, x) = Ax$ (katso 1. demojen tehtävät 5-8).

6. Määritä kaikkien vektorien $x \in \mathbb{R}^n$ radat $\mathrm{Orb}(x) = \varphi(\mathrm{O}(n), x)$.

7. Olkoon $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Osoita topologisten ryhmien isomorfismi $\mathrm{Stab}(x) \simeq \mathrm{O}(n-1)$.