MATS132 Lineaariset Lien ryhmät demo 2 malliratkaisut

1. Kvaternioiden kompleksinen matriisiesitys $\mathbb{H} \hookrightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ saatiin matriiseilla

$$\mathbf{1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{i} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{j} = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{bmatrix} \quad \text{ja} \quad \mathbf{k} = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}.$$

(a) Tarkista kvaternioiden matriisiesitykselle relaatiot $\mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 = \mathbf{ijk} = -\mathbf{1}$.

(b) Osoita kvaternion $0 \neq q \in \mathbb{H}$ käänteisalkion kaava $q^{-1} = \bar{q}/|q|^2$.

Ratkaisu. (a)

$$\begin{aligned}
\mathbf{i}^2 &= \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} -1 \cdot 1 & 0 \\ 0 & 1 \cdot (-1) \end{bmatrix} = -\mathbf{1} \\
\mathbf{j}^2 &= \begin{bmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} (-i)^2 & 0 \\ 0 & (-i)^2 \end{bmatrix} = -\mathbf{1} \\
\mathbf{k}^2 &= \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} i^2 & 0 \\ 0 & (-i)^2 \end{bmatrix} = -\mathbf{1} \\
\mathbf{ijk} &= \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & (-i)^2 \\ -i^2 & 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = -\mathbf{1}.
\end{aligned}$$

(b) Kirjoitetaan $q = \begin{bmatrix} x & -\bar{y} \\ y & \bar{x} \end{bmatrix}$, $x, y \in \mathbb{C}$. Tällöin

$$\begin{aligned}
q\bar{q} &= \begin{bmatrix} x & -\bar{y} \\ y & \bar{x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & -\bar{y} \\ y & \bar{x} \end{bmatrix}^* = \begin{bmatrix} x & -\bar{y} \\ y & \bar{x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x} & \bar{y} \\ -y & x \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} x\bar{x} + \bar{y}y & x\bar{y} - \bar{y}x \\ y\bar{x} - y\bar{x} & y\bar{y} + \bar{x}x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} |x|^2 + |y|^2 & 0 \\ 0 & |x|^2 + |y|^2 \end{bmatrix} = |q|^2,
\end{aligned}$$

joten $q \cdot \bar{q}/|q|^2 = \mathbf{1}$.

$\square$

2. Olkoon $\Psi : \mathrm{GL}(n, \mathbb{C}) \hookrightarrow \mathrm{GL}(2n, \mathbb{R})$ Lauseen 2.15 blokkimatriisiupotus.

(a) Osoita, että kaikille $A \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$, $\Psi(A^*) = \Psi(A)^T$.

(b) Osoita, että $\Psi(\mathrm{U}(n)) \subset \mathrm{O}(2n)$.

(c) Onko $\Psi(\mathrm{U}(n)) = \mathrm{O}(2n)$?

Ratkaisu. (a) Kompleksilukujen upotukselle $\rho : \mathbb{C} \hookrightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, mille tahansa $z = a + bi \in \mathbb{C}$

$$\rho(z)^T = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix} = \rho(a - bi) = \rho(\bar{z}).$$

Blokkimatriisin transpoosi saadaan blokkien transpoosina, joten ylläolevasta seuraa, että

$$\Psi(A)^T = \big[\rho(A_{rs})\big]_{rs}^T = \big[\rho(A_{sr})^T\big]_{rs} = \big[\rho(\bar{A}_{sr})\big]_{rs} = \Psi(A^*).$$

(b) Olkoon $A \in \mathrm{U}(n)$. Koska Ψ on homomorfismi, (a)-kohdan nojalla

$$\Psi(A)^T \Psi(A) = \Psi(A^*)\Psi(A) = \Psi(A^* A) = \Psi(I) = I,$$

joten $\Psi(A) \in \mathrm{O}(2n)$.

(c) Ei, vastaesimerkiksi kelpaa diagonaalimatriisi

$$A = \begin{bmatrix} -1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{bmatrix}.$$

Tälle $A^T A = I$ joten $A \in \mathrm{O}(2n)$, mutta se ei voi olla minkään kompleksisen matriisin kuva, sillä ensimmäinen 2×2-blokki on $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, joka ei ole minkään kompleksiluvun kuva.

□

3. Todista Lause 3.8: Olkoot $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{K}^n$ lineaarisesti riippumattomia vektoreita ja $A = \begin{bmatrix} x_1 & \ldots & x_n \end{bmatrix} \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{K})$ niistä muodostettu matriisi. Osoita, että

$$A \in \begin{cases} \mathrm{O}(n), & \text{jos } \mathbb{K} = \mathbb{R} \\ \mathrm{U}(n), & \text{jos } \mathbb{K} = \mathbb{C} \end{cases} \iff \begin{array}{l} \text{vektorit } x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{K}^n \text{ muodostavat} \\ \text{ortonormaalin kannan} \end{array}.$$

Ratkaisu. Tarkastellaan matriisituloa A^*A blokkimatriisien tulona. Lemman 2.16 nojalla

$$A^*A = \begin{bmatrix} x_1^* \\ \vdots \\ x_n^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & \cdots & x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1^* x_1 & \dots & x_1^* x_n \\ \vdots & & \vdots \\ x_n^* x_1 & \dots & x_n^* x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \cdot x_1 & \dots & x_1 \cdot x_n \\ \vdots & & \vdots \\ x_n \cdot x_1 & \dots & x_n \cdot x_n \end{bmatrix}.$$

Näin ollen

$$A^*A = I \iff x_r \cdot x_s = \begin{cases} 1, & r = s \\ 0, & r \neq s \end{cases} \iff x_1, \dots, x_n \text{ ortonormaali kanta}$$

□

4. Olkoot G, $N \lhd G$, $H < G$ ja $K < G$ ryhmiä. Osoita, että jos $G = N \rtimes H$ ja $K = (N \cap K)(H \cap K)$, niin

$$K = (N \cap K) \rtimes (H \cap K).$$

Ratkaisu. (i) Puolisuoran tulon ensimmäinen ehto $K = (N \cap K)(H \cap K)$ on suoraan oletuksessa.

(ii) Koska $N \lhd G$, $gNg^{-1} \subset N$ kaikilla $g \in G$. Erityisesti sama pätee myös kun $g \in K$. Näin ollen kaikilla $k \in K$,

$$k(N \cap K)k^{-1} \subset kNk^{-1} \subset N$$

ja toisaalta myös

$$k(N \cap K)k^{-1} \subset kKk^{-1} = K,$$

joten $N \cap K \lhd K$.

(iii) Koska $N \cap H = \{e_G\}$,

$$(N \cap K) \cap (H \cap K) \subset N \cap H = \{e_G\} = \{e_K\}.$$

□

5. Tulkitaan $\mathrm{O}(1) < \mathrm{O}(n)$ blokkiupotuksen $\mathrm{GL}(1, \mathbb{R}) \hookrightarrow \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ kautta.

(a) Osoita, että $\mathrm{O}(n) = \mathrm{SO}(n) \rtimes \mathrm{O}(1)$

(b) Osoita, että $\mathrm{O}(1)$ ei ole normaali aliryhmä $\mathrm{O}(n)$:lle.

Ratkaisu. (a) Ryhmä O(1) on kahden alkion ryhmä

$$\mathrm{O}(1) = \{\pm 1\} \simeq \left\{ \begin{bmatrix} \pm 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{bmatrix} \right\} < \mathrm{O}(n).$$

Tarkastellaan hajoitelman $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R}) = \mathrm{SL}(n, \mathbb{R}) \rtimes \mathrm{GL}(1, \mathbb{R})$ leikkausta joukon $\mathrm{O}(n)$ kanssa. Suoraan määritelmästä nähdään, että

$$\mathrm{SO}(n) = \mathrm{SL}(n, \mathbb{R}) \cap \mathrm{O}(n).$$

Toisaalta myös

$$\mathrm{O}(1) = \mathrm{GL}(1, \mathbb{R}) \cap \mathrm{O}(n),$$

sillä 1×1-matriisille $A = \begin{bmatrix} a \end{bmatrix}$, $A^T A = \begin{bmatrix} a^2 \end{bmatrix}$.

Ortogonaaliselle matriisille $A \in \mathrm{O}(n)$, ehdosta

$$1 = \det(I) = \det(A^T A) = \det(A)^2$$

seuraa, että $\det(A) = \pm 1$. Näin ollen jokainen $A \in O(n)$ voidaan kirjoittaa matriisitulona

$$A = \underbrace{A \begin{bmatrix} \det(A) & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{bmatrix}}_{\in SO(n)} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} \det(A) & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{bmatrix}}_{\in O(1)}$$

Tällöin tehtävän 4 nojalla

$$\mathrm{O}(n) = \mathrm{SO}(n) \rtimes \mathrm{O}(1).$$

(b) Voidaan rajoittua tapaukseen $n = 2$. Yleinen tapaus $n \geq 2$ saadaan upotuksen $\mathrm{O}(2) \hookrightarrow \mathrm{O}(n)$ kautta. Olkoon $A = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \in \mathrm{O}(2)$. Tarkastellaan O(1):n epätriviaalin alkion konjugaatiota A:lla:

$$\begin{aligned}
A\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}A^{-1} &= \begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}\\
&= \begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-\cos\theta & -\sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}\\
&= \begin{bmatrix}-\cos^2\theta+\sin^2\theta & -2\sin\theta\cos\theta\\ -2\sin\theta\cos\theta & -\sin^2\theta+\cos^2\theta\end{bmatrix}\\
&= \begin{bmatrix}-\cos 2\theta & -\sin 2\theta\\ -\sin 2\theta & \cos 2\theta\end{bmatrix}\notin \mathrm{O}(1).
\end{aligned}$$

□

Tarkastellaan ortogonaaliryhmän toimintoa $\varphi : \mathrm{O}(n)\times\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, \varphi(A,x) = Ax$ (katso 1. demojen tehtävät 5-8).

6. Määritä kaikkien vektorien $x\in\mathbb{R}^n$ radat $\mathrm{Orb}(x) = \varphi(\mathrm{O}(n), x)$.

Ratkaisu. Lauseen 3.7 nojalla kaikille $A\in\mathrm{O}(n)$, $\|Ax\| = \|x\|$. Näin ollen jokainen rata sisältyy pallonpinnalle

$$\mathrm{Orb}(x)\subset S^{n-1}(0,\|x\|) = \{y\in\mathbb{R}^n:\ \|y\| = \|x\|\}.$$

Toisaalta, jos $x\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$ on mikä tahansa vektori, voidaan löytää ortonormaali kanta $x_1,\ldots,x_n\in\mathbb{R}^n$, missä $x_1 = x/\|x\|$. Näitä vektoreita sarakkeina käyttäen saadaan Lauseen 3.8 nojalla matriisi $A = \begin{bmatrix}x_1 & \ldots & x_n\end{bmatrix}\in\mathrm{O}(n)$. Tälle matriisille

$$A(\|x\|e_1) = \|x\|x_1 = x,$$

joten sen käänteismatriisille $A^{-1}x = \|x\|e_1$. Erityisesti $\|x\|e_1\in\mathrm{Orb}(x)$.

Koska radat ovat joko täysin erillisiä tai identtisiä, tästä seuraa, että $\mathrm{Orb}(x) = \mathrm{Orb}(y)$ jos $\|x\| = \|y\|$, joten kaikille $y\in S^{n-1}(0,\|x\|)$

$$y\in\mathrm{Orb}(y) = \mathrm{Orb}(x),$$

joten $\mathrm{Orb}(x) = S^{n-1}(0,\|x\|)$. □

7. Olkoon $x\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$. Osoita topologisten ryhmien isomorfismi $\mathrm{Stab}(x)\simeq\mathrm{O}(n-1)$.

Ratkaisu. Matriisitulon lineaarisuuden nojalla $\mathrm{Stab}(x) = \mathrm{Stab}(x/\|x\|)$. Toisaalta, laajentamalla $x/\|x\|$ ortonormaaliksi kannaksi $x_1, x_2, \ldots, x/\|x\|$ ja käyttämällä kannanvaihtomatriisia $U = \begin{bmatrix}x_1 & \ldots & x_{n-1} & x/\|x\|\end{bmatrix}$ nähdään (kuten 1. demojen 8 tehtävässä), että

$$\mathrm{Stab}(x) = \mathrm{Stab}(x/\|x\|) = U\cdot\mathrm{Stab}(e_n)\cdot U^{-1}.$$

Koska konjugaatio $A \mapsto UAU^{-1}$ on topologisten ryhmien isomorfismi, riittää osoittaa, että $\mathrm{Stab}(e_n) \simeq O(n-1)$.

Olkoon $A \in \mathrm{Stab}(e_n)$. Tällöin $Ae_n = e_n$ on matriisin A viimeinen sarake, eli matriisin A^T viimeinen rivi. Matriisitulon $A^T A$ viimeinen rivi on tällöin sama kuin matriisin A viimeinen rivi. Ehdosta $A^T A = I$ seuraa siis, että

$$A = \begin{bmatrix} B & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

jollekin matriisille $B \in \mathrm{GL}(n-1, \mathbb{R})$. Toisaalta

$$I = A^T A = \begin{bmatrix} B^T & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B^T B & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

joten itse asiassa $B \in \mathrm{O}(n-1)$. Kääntäen, mille tahansa blokkimatriisille $A = \begin{bmatrix} B & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $B \in \mathrm{O}(n-1)$, $Ae_n = e_n$, eli $A \in \mathrm{Stab}(e_n)$. $\square$