MATS132 Lineaariset Lien ryhmät demo 3 (07.02.2018)

1. Affiini ryhmä on

$$\mathrm{Aff}(n, \mathbb{K}) = \left\{ \begin{bmatrix} A & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix} : \ A \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{K}), b \in \mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{K}) \simeq \mathbb{K}^n \right\}.$$

(a) Osoita, että $\mathrm{Aff}(n, \mathbb{K})$ on matriisiryhmä.

(b) Olkoon $\iota : \mathbb{K}^n \hookrightarrow \mathbb{K}^n \times \{1\} \subset \mathbb{K}^{n+1}$ inkluusio $\iota(x) = (x, 1)$. Osoita, että kaikille $L = \begin{bmatrix} A & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathrm{Aff}(n, \mathbb{K})$ kuvaus $\iota^{-1} \circ L \circ \iota : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ on hyvin määritelty, ja antaa affiinin kuvauksen

$$\iota^{-1} \circ L \circ \iota(x) = Ax + b.$$

2. Euklidinen ryhmä on

$$\mathrm{E}(n) = \left\{ \begin{bmatrix} A & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix} : \ A \in \mathrm{O}(n), b \in \mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^n \right\}.$$

(a) Osoita, että $\mathrm{E}(n) < \mathrm{Aff}(n, \mathbb{R})$ on matriisiryhmä.

(b) Osoita, että jokaiselle $L \in \mathrm{E}(n)$, affiini kuvaus $F = \iota^{-1} \circ L \circ \iota : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ on isometria, eli että $\|F(x) - F(y)\| = \|x - y\|$ kaikille $x, y \in \mathbb{R}^n$.

3. (a) Olkoon $G < \mathrm{GL}(n, \mathbb{K})$ matriisiryhmä ja $\gamma : [0, 1] \to G$ sekä $\beta : [0, 1] \to G$ polkuja. Osoita, että

$$\gamma \star \beta : [0, 2] \to \mathrm{GL}(n, \mathbb{K}), \quad \gamma \star \beta(t) = \begin{cases} \gamma(t), & 0 \le t < 1 \\ \gamma(1)\beta(0)^{-1}\beta(t-1), & 1 \le t \le 2 \end{cases}$$

on myös polku G:ssä.

(b) Olkoon $G \simeq (\mathbb{R}, +)$ (katso 1. demojen 2. tehtävästä matriisiryhmäesitys tälle additiiviselle ryhmälle) ja $\gamma : [0, 1] \to G$, $\gamma(t) = t$. Määritä polku $\gamma \star \gamma : [0, 2] \to G$.

Käännä

4. Tarkastellaan kuvausta $\Phi : \mathrm{SU}(2) \times \mathrm{SU}(2) \to \mathrm{GL}(4, \mathbb{R})$, missä $A = \Phi(q, p)$ määritellään kvaterniotulona

$$A : \mathbb{H} \to \mathbb{H}, \quad A(x) = qxp^{-1}.$$

(Muista, että vektoriavaruuksina $\mathbb{H} \simeq \mathbb{R}^4$)

(a) Osoita, että Φ on jatkuva homomorfismi.

(b) Osoita, että $\Phi(\mathrm{SU}(2) \times \mathrm{SU}(2)) \subset \mathrm{SO}(4)$ (Vihje: hyödynnä matriisiryhmän $\mathrm{SU}(2)$ yhtenäisyyttä).

(c) Osoita, että $\ker \Phi = \{\pm I\}$.

5. Tarkista matriisien (operaattori)normin ominaisuudet:

(a) $\|AB\| \leq \|A\|\|B\|$ kaikille $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

(b) $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$ kaikille $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

(c) $\|A_k - A\| \to 0 \iff A_k \to A$ komponenteittain.

(d) $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ ja $\|A - I\| < 1 \implies A \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{K})$.

6. Todista Lemma 4.9: $\exp(BAB^{-1}) = B \exp(A) B^{-1}$ kaikille $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ ja $B \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{K})$.

7. Olkoot $x, y \in \mathbb{C}^2$ vektoreita joille $\|x\| = \|y\|$. Osoita, että on olemassa $A \in \mathrm{SU}(2)$ jolle $Ax = y$.

8. Osoita, että $\mathrm{SU}(n), n \geq 3$, on polkuyhtenäinen olettaen että $\mathrm{SU}(n-1)$ ja $\mathrm{SU}(2)$ tunnetaan polkuyhtenäisiksi.