MATS132 Lineaariset Lien ryhmät demo 3 malliratkaisut

1. Affiini ryhmä on

$$\mathrm{Aff}(n,\mathbb{K}) = \left\{ \begin{bmatrix} A & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix} : A \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{K}), b \in \mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{K}) \simeq \mathbb{K}^n \right\}.$$

(a) Osoita, että $\mathrm{Aff}(n,\mathbb{K})$ on matriisiryhmä.

(b) Olkoon $\iota : \mathbb{K}^n \hookrightarrow \mathbb{K}^n \times \{1\} \subset \mathbb{K}^{n+1}$ inkluusio $\iota(x) = (x,1)$. Osoita, että kaikille $L = \begin{bmatrix} A & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathrm{Aff}(n,\mathbb{K})$ kuvaus $\iota^{-1} \circ L \circ \iota : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ on hyvin määritelty, ja antaa affiinin kuvauksen

$$\iota^{-1} \circ L \circ \iota(x) = Ax + b.$$

Ratkaisu. (a) $\mathrm{Aff}(n,\mathbb{K})$ on $\mathrm{GL}(n+1,\mathbb{K})$:n aliryhmä:

(i) $I = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathrm{Aff}(n,\mathbb{K})$.

(ii) Olkoot $\begin{bmatrix} A_1 & b_1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} A_2 & b_2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathrm{Aff}(n,\mathbb{K})$. Tällöin

$$\begin{bmatrix} A_1 & b_1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_2 & b_2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1A_2 & A_1b_2 + b_1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathrm{Aff}(n,\mathbb{K}).$$

(iii) $\begin{bmatrix} A & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} A^{-1} & -A^{-1}b \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathrm{Aff}(n,\mathbb{K})$.

Se, että $\mathrm{Aff}(n,\mathbb{K}) \subset \mathrm{GL}(n+1,\mathbb{K})$ on suljettu seuraa siitä että se koostuu suljetuista lohkoista. Olkoon $L_k = \begin{bmatrix} A_k & b_k \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathrm{Aff}(n,\mathbb{K})$ jono, jolle $L_k \to L \in \mathrm{GL}(n+1,\mathbb{K})$.

Tällöin jono suppenee myös lohkoittain, eli $L = \begin{bmatrix} A & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ja $A_k \to A$, $b_k \to b$. Koska $A_k \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{K})$ ja lohkoupotuksen kautta $\mathrm{GL}(n,\mathbb{K}) \subset \mathrm{GL}(n+1,\mathbb{K})$ on suljettu, $A \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{K})$. Näin ollen $L \in \mathrm{Aff}(n,\mathbb{K})$.

(b) Kaikille $(x,1) \in \mathbb{K}^n \times \{1\} \subset \mathbb{K}^{n+1}$,

$$\begin{bmatrix} A & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Ax + b \\ 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{K}^n \times \{1\}.$$

Näin ollen $\iota^{-1} \circ L \circ \iota$ on hyvin määritelty ja antaa affiinin kuvauksen $x \mapsto Ax + b$.

$\square$

2. Euklidinen ryhmä on

$$\mathrm{E}(n) = \left\{ \begin{bmatrix} A & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix} : A \in \mathrm{O}(n), b \in \mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^n \right\}.$$

(a) Osoita, että $\mathrm{E}(n) < \mathrm{Aff}(n, \mathbb{R})$ on matriisiryhmä.

(b) Osoita, että jokaiselle $L \in \mathrm{E}(n)$, affiini kuvaus $F = \iota^{-1} \circ L \circ \iota : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ on isometria, eli että $\|F(x) - F(y)\| = \|x - y\|$ kaikille $x, y \in \mathbb{R}^n$.

Ratkaisu. (a) Todistus on sama kuin tehtävän 1 (a)-kohdan todistus, sillä $\mathrm{O}(n) < \mathrm{GL}(n, \mathbb{K})$ on matriisiryhmä.

(b) Olkoot $x, y \in \mathbb{R}^n$ ja $L = \begin{bmatrix} A & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathrm{E}(n)$. Tällöin tehtävän 1 (b)-kohdan perusteella $F(x) = Ax + b$. Toisaalta Lauseen 3.7 perusteella ortogonaalimatriisille $A \in \mathrm{O}(n)$, $\|Ax - Ay\| = \|x - y\|$, joten

$$\|F(x) - F(y)\| = \|(Ax - b) - (Ay - b)\| = \|Ax - Ay\| = \|x - y\|.$$

□

3. (a) Olkoon $G < \mathrm{GL}(n, \mathbb{K})$ matriisiryhmä ja $\gamma : [0, 1] \to G$ sekä $\beta : [0, 1] \to G$ polkuja. Osoita, että

$$\gamma \star \beta : [0, 2] \to \mathrm{GL}(n, \mathbb{K}), \quad \gamma \star \beta(t) = \begin{cases} \gamma(t), & 0 \le t < 1 \\ \gamma(1)\beta(0)^{-1}\beta(t-1), & 1 \le t \le 2 \end{cases}$$

on myös polku G:ssä.

(b) Olkoon $G \simeq (\mathbb{R}, +)$ (katso 1. demojen 2. tehtävästä matriisiryhmäesitys tälle additiiviselle ryhmälle) ja $\gamma : [0, 1] \to G$, $\gamma(t) = t$. Määritä polku $\gamma \star \gamma : [0, 2] \to G$.

Ratkaisu. (a) Koska $\gamma \star \beta(t)$ on joko ryhmän G alkio $\gamma(t)$, tai tulo ryhmän G alkioista $\gamma(1), \beta(0)^{-1}$ ja $\beta(t-1)$, $\gamma \star \beta(t) \in G$. Riittää siis tarkistaa, että $\gamma \star \beta$ on jatkuva.

Välillä $[0, 1)$, $\gamma \star \beta(t) = \gamma(t)$, ja γ on jatkuva. Välillä $(1, 2]$, $\gamma \star \beta(t) = g \cdot \beta(t-1)$ alkiolle $g = \gamma(1)\beta(0)^{-1}$. Koska matriisikertolasku ja β ovat jatkuvia, myös $\gamma \star \beta$ on jatkuva välillä $(1, 2]$.

Lisäksi

$$\lim_{t \to 1-} \gamma \star \beta(t) = \lim_{t \to 1-} \gamma(t) = \gamma(1)$$

ja matriisikertolaskun jatkuuvuden nojalla

$$\begin{aligned}\lim_{t\to 1+}\gamma\star\beta(t) &= \lim_{t\to 1+}\gamma(1)\beta(0)^{-1}\beta(t-1)\\ &= \lim_{t\to 0+}\gamma(1)\beta(0)^{-1}\beta(t)\\ &= \gamma(1)\beta(0)^{-1}\beta(0) = \gamma(1).\end{aligned}$$

Siis $\gamma\star\beta$ on jatkuva myös pisteessä $t=1$.

(b) Additiivisen ryhmän $(\mathbb{R},+)$ matriisiesitys on $G = \left\{\begin{bmatrix}1 & x\\ 0 & 1\end{bmatrix} : x\in\mathbb{R}\right\}$. Polku $\gamma\star\gamma$ koostuu siis paloista

$$\begin{aligned}\gamma(t) &= \begin{bmatrix}1 & t\\ 0 & 1\end{bmatrix} \text{ ja}\\ \gamma(1)\gamma(0)^{-1}\gamma(t-1) &= \begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}1 & t-1\\ 0 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & t\\ 0 & 1\end{bmatrix},\end{aligned}$$

eli

$$\gamma\star\gamma : [0,2]\to(\mathbb{R},+),\quad \gamma\star\gamma(t) = t.$$

□

4. Tarkastellaan kuvausta $\Phi : \mathrm{SU}(2)\times\mathrm{SU}(2)\to\mathrm{GL}(4,\mathbb{R})$, $A=\Phi(q,p)$ määritellään kvaterniotulona

$$A:\mathbb{H}\to\mathbb{H},\quad A(x) = qxp^{-1}.$$

(Muista, että vektoriavaruuksina $\mathbb{H}\simeq\mathbb{R}^4$)

(a) Osoita, että Φ on jatkuva homomorfismi.

(b) Osoita, että $\Phi(\mathrm{SU}(2)\times\mathrm{SU}(2))\subset\mathrm{SO}(4)$ (Vihje: hyödynnä matriisiryhmän SU(2) yhtenäisyyttä).

(c) Osoita, että $\ker\Phi = \{\pm I\}$.

Ratkaisu. (a) Olkoot $(q_1,p_1),(q_2,p_2)\in\mathrm{SU}(2)\times\mathrm{SU}(2)$. Kaikille $x\in\mathbb{H}$

$$\Phi(q_1,p_1)\circ\Phi(q_2,p_2)(x) = \Phi(q_1,p_1)(q_2xp_2^{-1}) = q_1q_2xp_2^{-1}p_1^{-1} = (q_1q_2)x(p_1p_2)^{-1} = \Phi(q_1q_2,p_1p_2)(x).$$

Kuvauksen Φ jatkuvuus seuraa kvaterniotulon (matriisitulon) jatkuvuudesta.

(b) Yksikkökvaternioille $q, p \in \mathrm{SU}(2)$,

$$|Ax| = |q||x|\left|p^{-1}\right| = |x|,$$

joten Lauseen 3.7 karakterisaation nojalla $A \in \mathrm{O}(4)$. Toisaalta, koska $\mathrm{SU}(2)$ on yhtenäinen, myös $\mathrm{SU}(2) \times \mathrm{SU}(2)$, ja edelleen (a)-kohdan nojalla $\Phi(\mathrm{SU}(2) \times \mathrm{SU}(2))$ ovat yhtenäisiä.

Koska $\Phi(1,1) = I \in \mathrm{SO}(4)$ ja $\mathrm{O}(4) = \mathrm{SO}(4) \rtimes \mathrm{O}(1) \simeq \mathrm{SO}(4) \rtimes \{\pm 1\}$, tästä seuraa, että $\Phi(\mathrm{SU}(2) \times \mathrm{SU}(2)) \subset \mathrm{SO}(4)$.

(c) Jos $\Phi(q,p) = I$, niin erityisesti $\Phi(q,p)1 = q1p^{-1} = 1$, eli $q = p$. Tällöin $I = \Phi(q,p) = \Phi(q,q) = R_q \in \mathrm{SO}(3)$, joten $\Phi(q,p) = \pm I$.

□

5. Tarkista matriisien (operaattori)normin ominaisuudet:

(a) $\|AB\| \leq \|A\|\|B\|$ kaikille $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

(b) $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$ kaikille $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

(c) $\|A_k - A\| \to 0 \iff A_k \to A$ komponenteittain.

(d) $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ ja $\|A - I\| < 1 \implies A \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{K})$.

Ratkaisu. (a)

$$\begin{aligned} \|AB\| &= \sup_{x \neq 0} \frac{\|ABx\|}{\|x\|} = \sup_{x \neq 0} \frac{\|ABx\|}{\|Bx\|} \frac{\|Bx\|}{\|x\|} \\ &\leq \sup_{y \neq 0} \frac{\|Ay\|}{\|y\|} \sup_{x \neq 0} \frac{\|Bx\|}{\|x\|} = \|A\|\|B\|. \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} \|A + B\| &= \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax + Bx\|}{\|x\|} \leq \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\| + \|Bx\|}{\|x\|} \\ &\leq \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} \sup_{x \neq 0} \frac{\|Bx\|}{\|x\|} = \|A\| + \|B\| \end{aligned}$$

(c) Lineaarisuuden nojalla voidaan olettaa, että $A = 0$ (eli korvataan matriisit A_k matriiseilla $\tilde{A}_k = A_k - A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$).

“ $\Longrightarrow$ ” Jos $\|A_k\| \to 0$, niin $\|A_k e_j\| \to 0$ kaikilla kantavektoreilla $e_1, \ldots, e_n$. Koska $A_k e_j$ on matriisin A_k j:s sarake, tämä tarkoittaa, että komponenteittain $A_k \to 0$.

“ $\Longleftarrow$ ” Jos $A_k \to 0$ komponenteittain, niin $\|A_k e_j\| \to 0$. Tällöin myös $\sum_{j=1}^n \|A_k e_j\| \to 0$. Toisaalta mielivaltaiselle $x = x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n$

$$\|A_k x\| \leq |x_1|\|A_k e_1\| + \cdots + |x_n|\|A_k e_n\| \leq \|x\| \left(\sum_{j=1}^n \|A_k e_j\| \right),$$

joten

$$\|A_k\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} \leq \sum_{j=1}^n \|A_k e_j\| \to 0.$$

(d) Riittää osoittaa, että $\ker A = \{0\}$, eli että $\|Ax\| > 0$ kaikille $x \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\}$. Matriisinormin määritelmän perusteella

$$\|Ax - x\| = \|(A - I)x\| \leq \|A - I\|\|x\| < \|x\|,$$

joten kolmioepäyhtälöä käyttäen saadaan

$$\|Ax\| = \|Ax - x + x\| \geq \|x\| - \|Ax - x\| > \|x\| - \|x\| = 0.$$

□

6. Todista Lemma 4.9: $\exp(BAB^{-1}) = B\exp(A)B^{-1}$ kaikille $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ ja $B \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{K})$.

Ratkaisu. Koska

$$(BAB^{-1})(BAB^{-1}) = BA^2B^{-1},$$

matriisin BAB^{-1} potenssit ovat

$$(BAB^{-1})^k = BA^kB^{-1}.$$

Tällöin matriisieksponentiaalin määritelmän mukaan

$$\exp(BAB^{-1}) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(BAB^{-1})^k}{k!} = B \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} \right) B^{-1} = B\exp(A)B^{-1}.$$

□

7. Olkoot $x, y \in \mathbb{C}^2$ vektoreita joille $\|x\| = \|y\|$. Osoita, että on olemassa $A \in \mathrm{SU}(2)$ jolle $Ax = y$.

Ratkaisu. Käsitellään ensin tapaus $x = e_1$ ja $y = (y_1, y_2) \in \mathbb{C}^2$, $\|y\| = 1$. Määritellään

$$A_y = \begin{bmatrix} y_1 & -\bar{y}_2 \\ y_2 & \bar{y}_1 \end{bmatrix}.$$

Tälle matriisille selvästi $A_y e_1 = y$. Toisaalta A_y on täsmälleen kvaternion kompleksiesityksen muotoa, ja $\det A_y = y_1\bar{y}_1 + y_2\bar{y}_2 = \|y\| = 1$, joten A_y on yksikkökvaternio, eli $A_y \in \mathrm{SU}(2)$.

Yleisessä tapauksessa, olkoot x, y, $\|x\| = \|y\|$. Tällöin

$$A_{y/\|y\|} A^{-1}_{x/\|x\|} x = A_{y/\|y\|}\Big(\|x\|e_1\Big) = \|x\|\frac{y}{\|y\|} = y,$$

eli $A_{y/\|y\|} A^{-1}_{x/\|x\|} \in \mathrm{SU}(2)$ antaa halutun kuvauksen. □

8. Osoita, että $\mathrm{SU}(n), n \geq 3$, on polkuyhtenäinen olettaen että $\mathrm{SU}(n-1)$ ja $\mathrm{SU}(2)$ tunnetaan polkuyhtenäisiksi.

Ratkaisu. Olkoon $A \in \mathrm{SU}(n)$. Oletuksen nojalla riittää osoittaa, että on olemassa polku A:sta johonkin $\mathrm{SU}(n-1)$:n matriisiin. Jos $Ae_1 = e_1$, niin $A \in \mathrm{Stab}(e_1) \simeq \mathrm{SU}(n-1)$ (katso 2. harjoitusten tehtävä 7, väitteen todistus kompleksisessa tapauksessa on identtinen). Tällöin triviaali polku riittää.

Jos $Ae_1 \neq e_1$, olkoon $W \subset \mathbb{C}^n$ taso (eli $\dim_{\mathbb{C}} W = 2$), joka sisältää vektorit e_1 ja Ae_1. Tason W kierrot määräävät aliryhmän $H < \mathrm{SU}(n)$, $H \simeq \mathrm{SU}(2)$. Koska $A \in \mathrm{SU}(n)$, $\|Ae_1\| = \|e_1\|$. Tällöin tehtävän 7 nojalla on olemassa $B \in H$ jolle $BAe_1 = e_1$.

Oletuksen mukaan $\mathrm{SU}(2)$ on polkuyhtenäinen, joten myös H on polkuyhtenäinen. Tällöin on olemassa polku $\gamma : [0,1] \to H$, $\gamma(0) = I$ ja $\gamma(1) = B$. Siirtämällä tätä polkua, eli määrittelemällä

$$\beta : [0,1] \to \mathrm{SU}(n), \quad \beta(t) = \gamma(t)A$$

saadaan polku jolle $\beta(0) = IA = A$ ja $\beta(1) = \gamma(1)A = BA$. Koska $BA \in \mathrm{SU}(n-1)$, tämä todistaa $\mathrm{SU}(n)$:n polkuyhtenäisyyden. □