MATS132 Lineaariset Lien ryhmät demo 4 (14.02.2018)

1. Olkoon G matriisiryhmä ja $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \to G$ sekä $\beta : (-\epsilon, \epsilon) \to G$ derivoituvia käyriä. Osoita, että $\alpha\beta : (-\epsilon, \epsilon) \to G, (\alpha\beta)(t) = \alpha(t)\beta(t)$ on myös derivoituva käyrä ja

$$\frac{d}{dt}\Big(\alpha(t)\beta(t)\Big) = \alpha'(t)\beta(t) + \alpha(t)\beta'(t).$$

2. Olkoon G matriisiryhmä, $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \to G$ derivoituva käyrä, ja $\alpha^{-1} : (-\epsilon, \epsilon) \to G$ käänteismatriisien käyrä $\alpha^{-1}(t) = \alpha(t)^{-1}$. Osoita, että käänteismatriisien käyrän derivaatta saadaan kaavalla

$$\frac{d}{dt}\Big(\alpha(t)^{-1}\Big) = -\alpha(t)^{-1}\alpha'(t)\alpha(t)^{-1}.$$

(Huomaa, että α^{-1}:n derivoituvuus seuraa siitä, että käänteismatriisien $\alpha(t)^{-1}$ komponentit ovat rationaalilausekkeita matriisin $\alpha(t)$ alkioista.)

3. Additiivisella ryhmällä $(\mathbb{R}^n, +)$ on matriisiesitys (vertaa demo 1.2.)

$$(\mathbb{R}^n, +) \simeq G = \left\{ \begin{bmatrix} I_n & x \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathrm{GL}(n+1, \mathbb{R}) : \ x \in \mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^n \right\},$$

missä I_n on $n \times n$-identiteettimatriisi. Määritä matriisiryhmän G tangenttiavaruus $T_I G$ ja dimensio.

4. Olkoon V vektoriavaruus ja $L : V \times V \to V$ bilineaarinen kuvaus. Määritellään rekursiivisesti kuvaukset $L_n : V^n \to V$ asettamalla $L = L_2$ ja

$$L_{k+1}(v_1, \ldots, v_{k+1}) = L\Big(v_1, L_k(v_1, \ldots, v_k)\Big), \quad v_1, \ldots, v_{k+1} \in V.$$

Osoita, että jokainen kuvaus L_n, $n \geq 2$ on multilineaarinen.

Käännä

5. Olkoon $\mathfrak{g}$ vektoriavaruus varustettuna bilineaarisella ja antikommutatiivisella kuvauksella $[\cdot,\cdot] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ ja olkoot $X, Y, Z \in \mathfrak{g}$ lineaarisesti riippuvia. Osoita, että Jacobin identiteetti pätee näille X, Y, Z, eli että

$$[X,[Y,Z]] + [Y,[Z,X]] + [Z,[X,Y]] = 0.$$

6. Todista Lemma 5.9: Olkoon $\mathfrak{g}$ vektoriavaruus varustettuna bilineaarisella antikommutatiivisella kuvauksella $[\cdot,\cdot] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$. Olkoon $e_1, \ldots, e_n$ kanta vektoriavaruudelle $\mathfrak{g}$. Osoita, että jos kaikille $1 \leq i < j < k \leq n$

$$[e_i,[e_j,e_k]] + [e_j,[e_k,e_i]] + [e_k,[e_i,e_j]] = 0,$$

niin kaikille $X, Y, Z \in \mathfrak{g}$

$$[X,[Y,Z]] + [Y,[Z,X]] + [Z,[X,Y]] = 0.$$

7. Olkoon G abelinen (eli $AB = BA$ kaikille $A, B \in G$) matriisiryhmä ja $\mathfrak{g}$ sen Lien algebra. Osoita, että $[X,Y] = 0$ kaikille $X, Y \in \mathfrak{g}$.

8. (a) Olkoon $a \in \mathbb{R}$. Määritä matriisin $\begin{bmatrix} 0 & -b \\ b & 0 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ eksponentiaali.

(b) Osoita, että nämä matriisit muodostavat SO(2):n Lien algebran, eli että

$$\mathfrak{so}(2) = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & -b \\ b & 0 \end{bmatrix} : \ b \in \mathbb{R} \right\}.$$