MATS132 Lineaariset Lien ryhmät demo 4 malliratkaisut

1. Olkoon G matriisiryhmä ja $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \to G$ sekä $\beta : (-\epsilon, \epsilon) \to G$ derivoituvia käyriä. Osoita, että $\alpha\beta : (-\epsilon, \epsilon) \to G, (\alpha\beta)(t) = \alpha(t)\beta(t)$ on myös derivoituva käyrä ja

$$\frac{d}{dt}\Big(\alpha(t)\beta(t)\Big) = \alpha'(t)\beta(t) + \alpha(t)\beta'(t).$$

Ratkaisu. Tarkastellaan käyrän $\alpha\beta$ erotusosamäärää pisteessä t:

$$\begin{aligned}\frac{\alpha(t+h)\beta(t+h) - \alpha(t)\beta(t)}{h} &= \frac{\alpha(t+h)\beta(t+h) - \alpha(t+h)\beta(t) + \alpha(t+h)\beta(t) - \alpha(t)\beta(t)}{h} \\ &= \alpha(t+h)\frac{\beta(t+h) - \beta(t)}{h} + \frac{\alpha(t+h) - \alpha(t)}{h}\beta(t).\end{aligned}$$

Koska $\lim\limits_{h\to 0} \alpha(t+h) = \alpha(t)$, tästä saadaan

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\Big(\alpha(t)\beta(t)\Big) &= \alpha(t)\lim_{h\to 0}\Big(\frac{\beta(t+h) - \beta(t)}{h}\Big) + \lim_{h\to 0}\Big(\frac{\alpha(t+h) - \alpha(t)}{h}\Big)\beta(t) \\ &= \alpha(t)\beta'(t) + \alpha'(t)\beta(t).\end{aligned}$$

$\square$

2. Olkoon G matriisiryhmä, $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \to G$ derivoituva käyrä, ja $\alpha^{-1} : (-\epsilon, \epsilon) \to G$ käänteismatriisien käyrä $\alpha^{-1}(t) = \alpha(t)^{-1}$. Osoita, että käänteismatriisien käyrän derivaatta saadaan kaavalla

$$\frac{d}{dt}\Big(\alpha(t)^{-1}\Big) = -\alpha(t)^{-1}\alpha'(t)\alpha(t)^{-1}.$$

(Huomaa, että α^{-1}:n derivoituvuus seuraa siitä, että käänteismatriisien $\alpha(t)^{-1}$ komponentit ovat rationaalilausekkeita matriisin $\alpha(t)$ alkioista.)

Ratkaisu. Tehtävän 1 nojalla

$$\frac{d}{dt}\Big(\alpha(t)\alpha(t)^{-1}\Big) = \alpha'(t)\alpha(t)^{-1} + \alpha(t)\left(\frac{d}{dt}\alpha(t)^{-1}\right).$$

Toisaalta $\alpha(t)\alpha(t)^{-1} = I$, joten

$$\begin{aligned} & \alpha'(t)\alpha(t)^{-1} + \alpha(t)\left(\frac{d}{dt}\alpha(t)^{-1}\right) = 0 \\ \iff \quad & \alpha(t)\left(\frac{d}{dt}\alpha(t)^{-1}\right) = -\alpha'(t)\alpha(t)^{-1} \\ \iff \quad & \frac{d}{dt}\alpha(t)^{-1} = -\alpha(t)^{-1}\alpha'(t)\alpha(t)^{-1}\end{aligned}$$

$\square$

3. Additiivisella ryhmällä $(\mathbb{R}^n, +)$ on matriisiesitys (vertaa demo 1.2.)

$$(\mathbb{R}^n, +) \simeq G = \left\{ \begin{bmatrix} I_n & x \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathrm{GL}(n+1, \mathbb{R}) : \ x \in \mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^n \right\},$$

missä I_n on $n \times n$-identiteettimatriisi. Määritä matriisiryhmän G tangenttiavaruus $T_I G$ ja dimensio.

Ratkaisu. Ryhmän G käyrät $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \to G$ ovat muotoa $\alpha(t) = \begin{bmatrix} I & x(t) \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, missä $x : (-\epsilon, \epsilon) \to \mathbb{R}^n$ on jokin käyrä. Ehto $\alpha(0) = I$ tulee siis muotoon $x(0) = 0$ ja käyrä α on derivoituva täsmälleen kun käyrä x on derivoituva. Näin ollen

$$\begin{aligned} T_I G &= \left\{ \begin{bmatrix} I & x'(0) \\ 0 & 1 \end{bmatrix} : \ x : (-\epsilon, \epsilon) \to \mathbb{R}^n \text{ derivoituva käyrä ja } x(0) = 0 \right\} \\ &= \left\{ \begin{bmatrix} I & y \\ 0 & 1 \end{bmatrix} : \ y \in \mathbb{R}^n \right\}. \end{aligned}$$

Siis itse asiassa $T_I G = G$ ja G:n dimensio matriisiryhmänä on sen dimensio vektorialiavaruutena $G \subset \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$, eli $\dim G = n$. □

4. Olkoon V vektoriavaruus ja $L : V \times V \to V$ bilineaarinen kuvaus. Määritellään rekursiivisesti kuvaukset $L_n : V^n \to V$ asettamalla $L = L_2$ ja

$$L_{k+1}(v_1, \ldots, v_{k+1}) = L\Big(v_1, L_k(v_2, \ldots, v_{k+1})\Big), \quad v_1, \ldots, v_{k+1} \in V.$$

Osoita, että jokainen kuvaus L_n, $n \geq 2$ on multilineaarinen.

Ratkaisu. Todistetaan väite induktiolla. Alkuaskel $n = 2$ on suoraan oletuksena. Oletetaan siis, että kuvaus L_n on multilineaarinen ja osoitetaan, että L_{n+1} on myös multilineaarinen.

Lineaarisuus ensimmäisessä komponentissa seuraa kuvauksen L bilineaarisuudesta:

$$\begin{aligned} L_{n+1}(av + bw, v_2, \ldots, v_{n+1}) &= L\Big(av + bw, L_n(v_2, \ldots, v_{n+1})\Big) \\ &= aL\Big(v, L_n(v_2, \ldots, v_{n+1})\Big) + bL\Big(w, L_n(v_2, \ldots, v_{n+1})\Big) \\ &= aL_{n+1}(v, v_2, \ldots, v_{n+1}) + bL_{n+1}(w, v_2, \ldots, v_{n+1}). \end{aligned}$$

Muissa komponenteissa tarvitaan sekä L_n:n että L:n multilineaarisuutta, esim. 2 komponentissa

$$\begin{aligned}
L_{n+1}(v_1, av + bw, v_3, \dots, v_{n+1}) &= L\Big(v_1, L_n(av + bw, v_3, \dots, v_{n+1})\Big) \\
&= L\Big(v_1, aL_n(v, v_3, \dots, v_{n+1}) + bL_n(w, v_3, \dots, v_{n+1})\Big) \\
&= aL\Big(v_1, L_n(v, v_3, \dots, v_{n+1})\Big) + bL\Big(v_1, L_n(w, v_3, \dots, v_{n+1})\Big) \\
&= aL_{n+1}(v_1, v, v_3, \dots, v_{n+1}) + bL_{n+1}(v_1, w, v_3, \dots, v_{n+1}).
\end{aligned}$$

Komponenttien $3, \dots, n+1$ lineaarisuus on täsmälleen sama todistus kuin komponentin 2 lineaarisuus. □

5. Olkoon $\mathfrak{g}$ vektoriavaruus varustettuna bilineaarisella ja antikommutatiivisella kuvauksella $[\cdot,\cdot] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ ja olkoot $X, Y, Z \in \mathfrak{g}$ lineaarisesti riippuvia. Osoita, että Jacobin identiteetti pätee näille X, Y, Z, eli että

$$[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0.$$

Ratkaisu. Jos vektorit X, Y, Z ovat lineaarisesti riippuvat, jokin niistä voidaan kirjoittaa lineaarikombinaationa kahden muun avulla. Jacobin identiteetin syklisyyden nojalla voidaan olettaa (järjestämällä vektorit tarvittaessa uudestaan), että joillekin $a, b \in \mathbb{K}$

$$X = aY + bZ.$$

Tehtävän 4 nojalla kaksinkertaiset sulkeet ovat lineaariset jokaisessa komponentissa, joten Jacobin identiteetin termit ovat

$$\begin{aligned}
[X, [Y, Z]] &= [aY + bZ, [Y, Z]] = a\,[Y, [Y, Z]] + b\,[Z, [Y, Z]]\,, \\
[Y, [Z, X]] &= [Y, [Z, aY + bZ]] = a\,[Y, [Z, Y]] + b\,[Y, [Z, Z]] \quad \text{ja} \\
[Z, [X, Y]] &= [Z, [aY + bZ, Y]] = a\,[Z, [Y, Y]] + b\,[Z, [Z, Y]]\,.
\end{aligned}$$

Antikommutatiivisuuden nojalla $[Z, Y] = -[Y, Z]$ ja $[Y, Y] = 0 = [Z, Z]$, joten nämä termit sievenevät edelleen

$$\begin{aligned}
[X, [Y, Z]] &= a\,[Y, [Y, Z]] + b\,[Z, [Y, Z]]\,, \\
[Y, [Z, X]] &= -a\,[Y, [Y, Z]] \quad \text{ja} \\
[Z, [X, Y]] &= -b\,[Z, [Y, Z]]\,,
\end{aligned}$$

joten nämä kumoavat summatessa toisensa. □

6. Todista Lemma 5.9: Olkoon $\mathfrak{g}$ vektoriavaruus varustettuna bilineaarisella antikommutatiivisella kuvauksella $[\cdot,\cdot] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$. Olkoon $e_1, \ldots, e_n$ kanta vektoriavaruudelle $\mathfrak{g}$. Osoita, että jos kaikille $1 \leq i < j < k \leq n$

$$[e_i, [e_j, e_k]] + [e_j, [e_k, e_i]] + [e_k, [e_i, e_j]] = 0,$$

niin kaikille $X, Y, Z \in \mathfrak{g}$

$$[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0.$$

Ratkaisu. Kirjoitetaan vektorit $X, Y, Z \in \mathfrak{g}$ kannan $e_1, \ldots, e_n$ suhteen

$$X = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i, \quad Y = \sum_{j=1}^{n} y_j e_j, \quad Z = \sum_{k=1}^{n} z_k e_k.$$

Jacobin identiteetin syklisyyden nojalla jos Jacobi pätee vektoreille X, Y, Z, se pätee myös vektoreille Y, Z, X. Toisaalta, jos Jacobi pätee vektoreille X, Y, Z, niin antikommutatiivisudeen nojalla Jacobi vektoreille X, Z, Y on

$$[X, [Z, Y]] + [Z, [Y, X]] + [Y, [X, Z]] = -[X, [Y, Z]] - [Z, [X, Y]] - [Y, [Z, X]].$$

Näin ollen Jacobin identiteetti riittää tarkastaa vain yhdelle järjestykselle vektoreista X, Y, Z.

Tehtävän 4 nojalla iteroidut sulkeet $(A, B, C) \mapsto [A, [B, C]]$ on multilineaarinen kuvaus. Näin ollen riittää tarkistaa ehto kantavektoreille, eli että

$$[e_i, [e_j, e_k]] + [e_j, [e_k, e_i]] + [e_k, [e_i, e_j]] = 0$$

kaikille $i, j, k \in \{1, \ldots, n\}$. Toisaalta tehtävän 5 nojalla tämä ehto pätee aina kun vektorit e_i, e_j, e_k ovat lineaarisesti riippuvia, eli jos $\{i, j, k\}$:ssa on toistettuja indeksejä. Jos taas toistettuja indeksejä ei ole, i, j, k voidaan uudelleenjärjestää siten että $i < j < k$, jolloin Jacobin identiteetti pätee oletuksen nojalla.

□

7. Olkoon G abelinen (eli $AB = BA$ kaikille $A, B \in G$) matriisiryhmä ja $\mathfrak{g}$ sen Lien algebra. Osoita, että $[X, Y] = 0$ kaikille $X, Y \in \mathfrak{g}$.

Ratkaisu. Olkoot $X = \alpha'(0)$ ja $Y = \beta'(0)$ joillekin derivoituville käyrille G:ssä. Tarkastellaan kuten Lauseessa 5.12 kuvauksta $F(t, s) = \alpha(t)\beta(s)\alpha(t)^{-1}\beta(s)^{-1}$. Lauseen 5.12 todistuksen nojalla

$$[X, Y] = \lim_{t \to 0} \frac{\frac{d}{ds} F(t, s)\big|_{s=0}}{t}.$$

Toisaalta, jos G on abelinen, niin F on vain vakiokuvaus

$$F(t,s) = \alpha(t)\beta(s)\alpha(t)^{-1}\beta(s)^{-1} = \alpha(t)\alpha(t)^{-1}\beta(s)\beta(s)^{-1} = I,$$

jolloin $\frac{d}{ds} F(t,s)\big|_{s=0} = \frac{d}{ds} I\big|_{s=0} = 0$ ja edelleen $[X,Y] = 0$. $\square$

8. (a) Olkoon $a \in \mathbb{R}$. Määritä matriisin $\begin{bmatrix} 0 & -b \\ b & 0 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ eksponentiaali.

(b) Osoita, että nämä matriisit muodostavat SO(2):n Lien algebran, eli että

$$\mathfrak{so}(2) = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & -b \\ b & 0 \end{bmatrix} : b \in \mathbb{R} \right\}.$$

Ratkaisu. (a) Käytetään kompleksilukujen reaalimatriisiesitystä $\rho : \mathbb{C} \hookrightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $\rho(a + bi) = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$. Koska matriisieksponentiaali määritellään sarjana ja ρ on jatkuva rengashomomorfismi, kaikille $z \in \mathbb{C}$

$$\exp \circ \rho(z) = \rho(e^z),$$

joten

$$\exp\left(\begin{bmatrix} 0 & -b \\ b & 0 \end{bmatrix}\right) = \exp(\rho(bi)) = \rho\left(e^{bi}\right) = \rho(\cos b + i \sin b) = \begin{bmatrix} \cos b & -\sin b \\ \sin b & \cos b \end{bmatrix}.$$

(b) Jokainen $A \in \mathrm{SO}(2)$ on muotoa (katso Lause 3.12)

$$A = \begin{bmatrix} \cos b & -\sin b \\ \sin b & \cos b \end{bmatrix} = \exp\left(\begin{bmatrix} 0 & -b \\ b & 0 \end{bmatrix}\right)$$

jollekin $b \in \mathbb{R}$. Näin ollen jokainen derivoituva käyrä $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \to \mathrm{SO}(2)$, $\alpha(0) = I$ voidaan kirjoittaa muodossa $\alpha(t) = \exp\left(\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} f(t)\right)$ jollekin derivoituvalle $f : (-\epsilon, \epsilon) \to \mathbb{R}$, $f(0) = 0$. Tällaiselle käyrälle taas

$$\alpha'(0) = \frac{d}{dt} \exp\left(\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} f(t)\right)\Bigg|_{t=0} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} f'(0) = \begin{bmatrix} 0 & -f'(0) \\ f'(0) & 0 \end{bmatrix},$$

joten $\mathfrak{so}(2) \subset \left\{ \begin{bmatrix} 0 & -b \\ b & 0 \end{bmatrix} : b \in \mathbb{R} \right\}$. Toisaalta asettamalla $f(t) = bt$ nähdään että $\begin{bmatrix} 0 & -b \\ b & 0 \end{bmatrix} \in \mathfrak{so}(2)$, osoittaen halutun yhtäsuuruuden.

$\square$