MATS132 Lineaariset Lien ryhmät demo 5 (28.02.2018)

1. Olkoon $\mathfrak{g}$ $\mathbb{K}$-Lien algebra. Osoita, että

$$[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = \operatorname*{span}_{\mathbb{K}}\{[X, Y] : \ X, Y \in \mathfrak{g}\}$$

on Lien algebran $\mathfrak{g}$ ideaali.

2. Olkoon $\varphi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ surjektiivinen Lien algebrojen morfismi, jolle lisäksi $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \subset \ker \varphi$. Osoita, että $\mathfrak{h}$ on abelinen.

3. Olkoot $G, H < \mathrm{GL}(n, \mathbb{K})$ matriisiryhmiä ja $\mathfrak{g}, \mathfrak{h}$ niiden Lien algebrat. Osoita, että matriisiryhmän $G \cap H$ Lien algebra on $\mathfrak{g} \cap \mathfrak{h}$. (Voit käyttää faktaa: Jos N on matriisiryhmä ja $\mathfrak{n}$ sen Lien algebra, niin $\exp(\mathfrak{n}) \subset N$.)

4. Määritä matriisiryhmien $\mathrm{SO}(n)$ ja $\mathrm{O}(n)$ dimensiot.

5. Määritä $\mathbb{R}$-vektoriavaruuksille $\mathfrak{u}(n)$ ja $\mathfrak{su}(n)$ kannat.

6. Määritä affiinin ryhmän $\mathrm{Aff}(n, \mathbb{K})$ Lien algebra ja dimensio. (Affiinin ryhmän määritelmä löytyy 3. demojen 1. tehtävästä.)

7. Osoita, että ristitulo Lien algebra $(\mathbb{R}^3, \times)$ ja Lien algebra $\mathfrak{so}(3)$ ovat isomorfiset.

8 (Bonus). Merkitään $n \times n$ identiteettimatriisia I_n ja muodostetaan kahdesta tällaisesta blokkidiagonaalimatriisi

$$Q = \operatorname{diag}(I_p, -I_q) = \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & -1 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & -1 \end{bmatrix} \in \mathrm{GL}(p+q, \mathbb{R}).$$

Määritä yleistetyn ortogonaaliryhmän

$$\mathrm{O}(p, q) = \{A \in \mathrm{GL}(p+q, \mathbb{R}) : \ A^T Q A = Q\}$$

Lien algebra ja dimensio. (Vihje: ehdon $\exp(B) \in \mathrm{O}(p, q)$ tarkastelussa voi hyödyntää identiteettiä $Q \exp(B) Q^{-1} = \exp(QBQ^{-1})$)