MATS132 Lineaariset Lien ryhmät demo 5 malliratkaisut

1. Olkoon $\mathfrak{g}$ $\mathbb{K}$-Lien algebra. Osoita, että

$$[\mathfrak{g},\mathfrak{g}] = \operatorname*{span}_{\mathbb{K}}\{[X,Y] : X, Y \in \mathfrak{g}\}$$

on Lien algebran $\mathfrak{g}$ ideaali.

Ratkaisu. $\mathfrak{i} = [\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$ on suoraan määritelmänsä perusteella Lien algebran $\mathfrak{g}$ vektorialiavaruus, joten riittää osoittaa kommutaattorirelaatio $[\mathfrak{g},\mathfrak{i}] \subset \mathfrak{i}$. Jos $X \in \mathfrak{g}$ ja $Y \in \mathfrak{i}$, niin myös $Y \in \mathfrak{g}$, joten $[X,Y] \in [\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$. □

2. Olkoon $\varphi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ surjektiivinen Lien algebrojen morfismi, jolle lisäksi $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}] \subset \ker\varphi$. Osoita, että $\mathfrak{h}$ on abelinen.

Ratkaisu. Olkoot $X, Y \in \mathfrak{h}$. Täytyy osoittaa, että $[X,Y] = 0$. Koska φ on surjektio, on olemassa $A, B \in \mathfrak{g}$ joille $\varphi(A) = X$ ja $\varphi(B) = Y$. Tällöin koska φ on Lien algebrojen morfismi ja $[A,B] \in [\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$,

$$[X,Y] = [\varphi(A),\varphi(B)] = \varphi([A,B]) = 0.$$

□

3. Olkoot $G, H < \mathrm{GL}(n,\mathbb{K})$ matriisiryhmiä ja $\mathfrak{g},\mathfrak{h}$ niiden Lien algebrat. Osoita, että matriisiryhmän $G \cap H$ Lien algebra on $\mathfrak{g}\cap\mathfrak{h}$. (Voit käyttää faktaa: Jos N on matriisiryhmä ja $\mathfrak{n}$ sen Lien algebra, niin $\exp(\mathfrak{n}) \subset N$.)

Ratkaisu. Olkoon $A \in T_I(G\cap H)$, jolloin on olemassa derivoituva käyrä $\alpha : (-\epsilon,\epsilon) \to G\cap H$ derivoituva käyrä, jolle $\alpha(0) = I$ ja $\alpha'(0) = A$. Toisaalta α on derivoituva käyrä myös G:ssä ja H:ssa, joten $A \in T_I G \cap T_I H = \mathfrak{g}\cap\mathfrak{h}$.

Jos taas $A \in \mathfrak{g}\cap\mathfrak{h}$ tarkastellaan käyrää $\alpha : \mathbb{R} \to \mathrm{GL}(n,\mathbb{K}), \alpha(t) = \exp(tA)$. Koska $\mathfrak{g}\cap\mathfrak{h}$ on vektoriavaruus, $tA \in \mathfrak{g}\cap\mathfrak{h}$ kaikilla $t \in \mathbb{R}$. Koska $tA \in \mathfrak{g}$, $\alpha(tA) \in G$ ja vastaavasti koska $tA \in \mathfrak{h}$, $\alpha(tA) \in H$. Näin ollen α on derivoituva käyrä $G\cap H$:ssa, jolle $\alpha(0) = I$ ja $\alpha'(0) = A$, joten $A \in T_I(G\cap H)$. □

4. Määritä matriisiryhmien $\mathrm{SO}(n)$ ja $\mathrm{O}(n)$ dimensiot.

Ratkaisu. Lauseen 5.17 mukaan ryhmien Lien algebrat ovat

$$\mathfrak{so}(n) = \mathfrak{o}(n) = \{A \in \mathfrak{gl}(n,\mathbb{K}) : A^T + A = 0\}.$$

Osoitetaan, että matriisit $\{E^{rs} - E^{sr} : 1 \le r < s \le n\}$ muodostavat tämän avaruuden kannan.

Näille matriiseille

$$(E^{rs} - E^{sr})^T + (E^{rs} - E^{sr}) = E^{sr} - E^{rs} + E^{rs} - E^{sr} = 0,$$

joten ne sisältyvät avaruuteen $\mathfrak{o}(n)$.

Toisaalta, jos $A \in \mathfrak{o}(n)$, antisymmetrisyys ehdosta $A^T + A = 0$ seuraa, että $A_{sr} = -A_{rs}$. Näin ollen

$$A = \sum_{r=1}^{n} \sum_{s=r+1}^{n} A_{rs}(E^{rs} - E^{sr}),$$

joten nämä matriisit $\{E^{rs} - E^{sr} : \ 1 \leq r < s \leq n\}$ muodostavat kannan. Näin ollen

$$\dim \mathfrak{o}(n) = \sum_{r=1}^{n} (n-r) = n^2 - \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n-1)}{2} = \binom{n}{2}.$$

□

5. Määritä $\mathbb{R}$-vektoriavaruuksille $\mathfrak{u}(n)$ ja $\mathfrak{su}(n)$ kannat.

Ratkaisu. Osoitetaan, että $\mathfrak{u}(n)$:llä on kanta

$$\{iE^{kk},\ k = 1, \ldots, n\} \cup \{E^{rs} - E^{sr},\ 1 \leq r < s \leq n\} \cup \{iE^{rs} + iE^{sr},\ 1 \leq r < s \leq n\}.$$

Väitetyn kannan matriiseille

$$\begin{gathered}(iE^{kk}) + (iE^{kk})^* = iE^{kk} - iE^{kk} = 0,\\ (E^{rs} - E^{sr}) + (E^{rs} - E^{sr})^* = E^{rs} - E^{sr} + E^{sr} - E^{rs} = 0 \quad \text{ja}\\ (iE^{rs} + iE^{sr}) + (iE^{rs} + iE^{sr})^* = iE^{rs} + iE^{sr} - iE^{rs} - iE^{sr} = 0,\end{gathered}$$

joten ainakin nämä kaikki sisältyvät avaruuteen $\mathfrak{u}(n)$. Nämä ovat selvästi $\mathbb{R}$-lineaarisesti riippumattomia.

Olkoon $A \in \mathfrak{u}(n)$. Kirjoitetaan $A = B + Ci$, missä $B, C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ovat reaalisia. Tällöin

$$A + A^* = (B + Ci) + (B + Ci)^* = (B + B^T) + (C - C^T)i.$$

Ehdosta $A + A^* = 0$ seuraa siis, että $B + B^T = 0$ ja $C - C^T = 0$, eli että $B_{rs} = -B_{sr}$ ja $C_{rs} = C_{sr}$. Näin ollen

$$\begin{aligned} B &= \sum_{r=1}^{n} \sum_{s=r+1}^{n} B_{rs}(E^{rs} - E^{sr}) \quad \text{ja} \\ C &= \sum_{k=1}^{n} C_{kk} E^{kk} + \sum_{r=1}^{n} \sum_{s=r+1}^{n} C_{rs}(E^{rs} + E^{sr}), \end{aligned}$$

mistä seuraa, että väitetyt matriisit muodostavat $\mathfrak{u}(n)$:lle kannan. Avaruuden $\mathfrak{u}(n)$ dimensio on siis

$$\dim \mathfrak{u}(n) = n + \frac{n(n-1)}{2} + \frac{n(n-1)}{2} = n + n^2 - n = n^2.$$

Vektoriavaruudelle $\mathfrak{su}(n)$, korvataan matriisit iE^{kk} matriiseilla $iE^{kk} - iE^{nn}$, $k = 1, \ldots, n-1$ ja osoitetaan että saadaan kanta. Nämä matriisit ovat edellisen nojalla $\mathfrak{u}(n)$:ssä, ja lisäksi

$$\begin{aligned} \operatorname{tr}(iE^{kk} - iE^{nn}) = i - i = 0, \\ r \neq s \implies \operatorname{tr}(E^{rs} - E^{sr}) + (E^{rs} - E^{sr})^* = 0 \quad \text{ja} \\ r \neq s \implies \operatorname{tr}(iE^{rs} + iE^{sr}) + (iE^{rs} + iE^{sr})^* = 0, \end{aligned}$$

joten ne sisältyvät avaruuteen $\mathfrak{su}(n)$ ja ovat $\mathbb{R}$-lineaarisesti riippumattomia.

Jos $A \in \mathfrak{su}(n)$, niin myös $A \in \mathfrak{u}(n)$, jolloin asettamalla $A = B + Ci$ saadaan

$$\begin{aligned} B &= \sum_{r=1}^{n} \sum_{s=r+1}^{n} B_{rs}(E^{rs} - E^{sr}), \\ C &= \sum_{k=1}^{n} C_{kk} E^{kk} + \sum_{r=1}^{n} \sum_{s=r+1}^{n} C_{rs}(E^{rs} + E^{sr}). \end{aligned}$$

Mutta nyt

$$0 = \operatorname{tr} A = \sum_{k=1}^{n} A_k k = i \sum_{k=1}^{n} C_{kk} \implies \sum_{k=1}^{n} C_{kk} = 0.$$

Näin ollen

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} C_{kk} E^{kk} &= \sum_{k=1}^{n} C_{kk}(E^{kk} - E^{nn} + E^{nn}) \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} C_{kk}(E^{kk} - E^{nn}) + \left(\sum_{k=1}^{n} C_{kk} \right) E^{nn} \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} C_{kk}(E^{kk} - E^{nn}), \end{aligned}$$

mistä seuraa, että väitetyt matriisit muodostavat $\mathfrak{su}(n)$:n kannan. Avaruuden dimensio on tällöin

$$\dim \mathfrak{su}(n) = n - 1 + \frac{n(n-1)}{2} + \frac{n(n-1)}{2} = n^2 - 1.$$

$\square$

6. Määritä affiinin ryhmän $\mathrm{Aff}(n, \mathbb{K})$ Lien algebra ja dimensio. (Affiinin ryhmän määritelmä löytyy 3. demojen 1. tehtävästä.)

Ratkaisu. Olkoon $\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \to \mathrm{Aff}(n, \mathbb{K})$ derivoituva käyrä, jolle $\gamma(0) = I$. Kirjoitetaan

$$\gamma(t) = \begin{bmatrix} \alpha(t) & \beta(t) \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

missä $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \to \mathrm{GL}(n, \mathbb{K})$ ja $\beta : (-\epsilon, \epsilon) \to \mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{K})$ ovat α:n komponenttikäyrät. Koska derivoituvuus tarkoittaa komponenteittaista derivoituvuutta, α ja β ovat derivoituvia käyriä. Lisäksi ehdosta $\gamma(0) = I$ seuraa että $\alpha(0) = I$, $\beta(0) = 0$, jolloin $\alpha'(0) \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{K})$ ja $\beta'(0) \in \mathbb{K}^n$.

Toisaalta, jos α ja β ovat mitkä tahansa tällaiset käyrät, niistä blokkeina muodostettu matriisi on derivoituva käyrä $\mathrm{Aff}(n, \mathbb{K})$:ssa, joten affiinin ryhmän Lien algebra on

$$\mathfrak{aff}(n, \mathbb{K}) = \left\{ \begin{bmatrix} A & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix} : \ A \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{K}), b \in \mathbb{K}^n \right\}.$$

Affiinin ryhmän dimensio on siis

$$\dim \mathfrak{aff}(n, \mathbb{R}) = \dim \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}) + \dim \mathbb{R}^n = n^2 + n \quad \text{tai}$$
$$\dim \mathfrak{aff}(n, \mathbb{C}) = \dim_{\mathbb{R}} \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C}) + \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C}^n = 2n^2 + 2n$$

□

7. Osoita, että ristitulo Lien algebra $(\mathbb{R}^3, \times)$ ja Lien algebra $\mathfrak{so}(3)$ ovat isomorfiset.

Ratkaisu. Lien algebralla $\mathfrak{so}(3)$ on kanta joka koostuu matriiseista

$$U_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad U_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad U_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

□

Näille saadaan tulot

$$U_1U_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad U_2U_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad U_3U_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Koska $U_j^T = -U_j$, nämä tulot riittävät kommutaattorien laskemiseen, sillä

$$[U_j, U_k] = U_jU_k - U_kU_j = U_jU_k - U_k^TU_j^T = U_jU_k - (U_jU_k)^T.$$

Näin ollen saadaan relaatiot

$$[U_1, U_2] = U_1U_2 - (U_1U_2)^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = U_3,$$

$$[U_2, U_3] = U_2U_3 - (U_2U_3)^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = U_1$$

$$[U_3, U_1] = U_3U_1 - (U_3U_1)^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = U_2.$$

Nämä ovat täsmälleen samat relaatiot kuin ristitulolla standardikannalle e_1, e_2, e_3:

$$[e_1, e_2] = e_1 \times e_2 = e_3$$
$$[e_2, e_3] = e_2 \times e_3 = e_1$$
$$[e_3, e_1] = e_3 \times e_1 = e_2,$$

joten kuvaus

$$\varphi : (\mathbb{R}^3, \times) \to \mathfrak{so}(3), \quad \varphi(x_1, x_2, x_3) = x_1U_1 + x_2U_2 + x_3U_3$$

on Lien algebrojen isomorfismi.

8 (Bonus). Olkoon

$$Q = \operatorname{diag}(I_p, -I_q) = \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & -1 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & -1 \end{bmatrix} \in \mathrm{GL}(p+q, \mathbb{R}).$$

Määritä yleistetyn ortogonaaliryhmän

$$\mathrm{O}(p, q) = \{A \in \mathrm{GL}(p+q, \mathbb{R}) : \ A^TQA = Q\}$$

Lien algebra ja dimensio.

Ratkaisu. Olkoon $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \to \mathrm{O}(p, q)$ derivoituva käyrä jolle $\alpha(0) = I$. Tällöin

$$0 = \frac{d}{dt}\, \alpha(t)^TQ\alpha(t)\Big|_{t=0} = \alpha'(0)^TQ + Q\alpha'(0).$$

Koska $Q = Q^T$, kaikille $A \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$,

$$A^T Q + QA = (QA)^T + QA.$$

Näin ollen

$$A^T Q + QA = (QA)^T + QA = 0 \iff QA \in \mathfrak{o}(p+q),$$

mistä saadaan inkluusio

$$\mathfrak{o}(p,q) \subset \{A \in \mathfrak{gl}(n,\mathbb{R}) : \ QA \in \mathfrak{o}(p+q)\} = Q^{-1} \cdot \mathfrak{o}(p+q) = Q \cdot \mathfrak{o}(p+q).$$

Vastakkaisen inkluusion todistamiseksi asetetaan $A = QB$ jollekin $B \in \mathfrak{o}(p+q)$. Käyttäen Lemmaa 4.9 ja relaatiota $Q = Q^{-1}$ saadaan

$$Q \exp(tA) Q^{-1} = \exp(QtAQ^{-1}) = \exp(QtQBQ^{-1}) = \exp(tBQ).$$

Näin ollen koska $B^T = -B$,

$$\exp(tA)^T Q \exp(tA) Q^{-1} = \exp(tB^T Q^T) \exp(tBQ) = \exp(-tBQ) \exp(tBQ) = I,$$

joten $\exp(tA) \in \mathrm{O}(p,q)$. Tästä seuraa, että

$$\mathfrak{o}(p,q) = Q \cdot \mathfrak{o}(p+q) \quad \text{ja}$$
$$\dim \mathfrak{o}(p,q) = \dim \mathfrak{o}(p+q) = \binom{p+q}{2}.$$

$\square$