MATS132 Lineaariset Lien ryhmät demo 6 (07.03.2018)

1. Olkoon $\varphi : G \to H$ derivoituva homomorfismi matriisiryhmien välillä ja $\varphi_* : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ sen derivaatta. Oletetaan, että $\ker\varphi$ on diskreetti, eli että jokaiselle $A \in \ker\varphi$ on olemassa avoin ympäristö $U \subset G$ jolle $U \cap \ker\varphi = \{A\}$. Osoita, että $\ker\varphi_* = \{0\}$.

2. Todista Lemma 7.2: olkoon $\varphi : G \to H$ derivoituva homomorfismi matriisiryhmien välillä ja $\varphi_* : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ sen derivaatta.

(a) Osoita, että $K = \ker\varphi = \{A \in G : \ \varphi(A) = I\}$ on matriisiryhmä.

(b) Osoita, että $\ker\varphi_* = \{X \in \mathfrak{g} : \ \varphi_*(X) = 0\}$ on matriisiryhmän K Lien algebra.

3. Olkoon $\mathfrak{g}$ Lien algebra. Osoita, että

$$Z(\mathfrak{g}) = \{X \in \mathfrak{g} : \ [X, Y] = 0 \ \forall Y \in \mathfrak{g}\}$$

on ideaali $\mathfrak{g}$:ssä.

Jos $\mathfrak{g}$ ja $\mathfrak{h}$ ovat Lien algebroja, tuloalgebra $\mathfrak{g} \times \mathfrak{h}$ määritellään asettamalla Lien sulkeiksi komponenteittaiset sulkeet

$$[(X_1, Y_1), (X_2, Y_2)] = ([X_1, X_2]_{\mathfrak{g}}, [Y_1, Y_2]_{\mathfrak{h}}), \quad (X_1, Y_1), (X_2, Y_2) \in \mathfrak{g} \times \mathfrak{h}.$$

4. Olkoot $\mathfrak{g}$ ja $\mathfrak{h}$ yksinkertaisia Lien algebroja. Osoita, että

(a) $\mathfrak{g} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$.

(b) $\mathfrak{g} \times \mathfrak{h}$ ei ole yksinkertainen Lien algebra.

(c) $\mathfrak{g} \times \mathfrak{h} = [\mathfrak{g} \times \mathfrak{h}, \mathfrak{g} \times \mathfrak{h}]$.

Käännä

Seuraavissa tehtävissä tarkastellaan homomorfismia $R : \mathrm{SU}(2) \to \mathrm{SO}(3)$, joka määriteltiin kvaterniotulon kautta seuraavasti:

Tulkitaan $q \in \mathrm{SU}(2)$ yksikkökvaterniona ja $\mathbb{R}^3$ imaginäärikvaternioiden avaruutena, ja määritellään kuvaus $R(q)$ kvaterniotulona

$$R(q) : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad \Big(R(q)\Big)(x) = qxq^{-1}.$$

Muista, että kvaterniotulo on itse asiassa matriisitulo kun imaginäärikvaternio $x = x_1\mathbf{i} + x_2\mathbf{j} + x_3\mathbf{k}$ kirjoitetaan muodossa

$$x = \begin{bmatrix} x_3 i & -x_1 - x_2 i \\ x_1 - x_2 i & -x_3 i \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{C}).$$

Tehtäväsarjan tavoitteena on löytää lauseke derivaatalle $R_* : \mathfrak{su}(2) \to \mathfrak{so}(3)$.

5. $\mathfrak{su}(2)$:lla on kanta

$$E_1 = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}, \quad E_2 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_3 = \begin{bmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{bmatrix}.$$

Osoita, että kuvauksen $R_* : \mathfrak{su}(2) \to \mathfrak{so}(3)$ lauseke määräytyy täysin pelkästään kuvapisteiden $R_*(E_1)$ ja $R_*(E_2)$ avulla.

6. Olkoon $t \in \mathbb{R}$ ja $x = x_1\mathbf{i} + x_2\mathbf{j} + x_3\mathbf{k} \in \mathbb{R}i + \mathbb{R}j + \mathbb{R}k$.

(a) Määritä matriisit $\exp(tE_1) \in \mathrm{SU}(2)$ ja $\exp(tE_2) \in \mathrm{SU}(2)$.

(b) Määritä lausekkeet vektoreille $\Big(R(\exp(tE_1)\Big)(x) \in \mathbb{R}i+\mathbb{R}j+\mathbb{R}k$ ja $\Big(R(\exp(tE_2)\Big)(x) \in \mathbb{R}i + \mathbb{R}j + \mathbb{R}k$.

7. (a) Muodosta matriisien $R(\exp(tE_1)) \in \mathrm{SO}(3)$ ja $R(\exp(tE_1)) \in \mathrm{SO}(3)$ lausekkeet.

(b) Määritä matriisit $R_*(E_1) \in \mathfrak{so}(3)$ ja $R_*(E_2) \in \mathfrak{so}(3)$.

8. Määritä kuvauksen $R_* : \mathfrak{su}(2) \to \mathfrak{so}(3)$ lauseke $\mathfrak{su}(2)$:n kannassa $\{E_1, E_2, E_3\}$, eli määritä matriisi $R_*(aE_1 + bE_2 + cE_3) \in \mathfrak{so}(3)$, $a, b, c \in \mathbb{R}$.