MATS132 Lineaariset Lien ryhmät demo 6 malliratkaisut

1. Olkoon $\varphi : G \to H$ derivoituva homomorfismi matriisiryhmien välillä ja $\varphi_* : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ sen derivaatta. Oletetaan, että $\ker \varphi$ on diskreetti, eli että jokaiselle $A \in \ker \varphi$ on olemassa avoin ympäristö $U \subset G$ jolle $U \cap \ker \varphi = \{A\}$. Osoita, että $\ker \varphi_* = \{0\}$.

Ratkaisu. Oletetaan, että $\varphi_*(X) = 0$ jollekin $X \in \mathfrak{g}$. Tällöin $\varphi \circ \exp(tX) = \exp \circ \varphi_*(tX) = \exp(0) = I$, joten $t \mapsto \exp(tX)$ on jatkuva polku joukossa $\ker \varphi$.

Toisaalta, koska $\ker \varphi$ on diskreetti, ainoa jatkuva polku tässä joukossa on vakiopolku $\exp(tX) = I$, joten itse asiassa $X = 0$. $\square$

2. Todista Lemma 7.2: olkoon $\varphi : G \to H$ derivoituva homomorfismi matriisiryhmien välillä ja $\varphi_* : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ sen derivaatta.

(a) Osoita, että $K = \ker \varphi = \{A \in G : \ \varphi(A) = I\}$ on matriisiryhmä.

(b) Osoita, että $\ker \varphi_* = \{X \in \mathfrak{g} : \ \varphi_*(X) = 0\}$ on matriisiryhmän K Lien algebra. (Vihje: hyödynnä relaatiota $\exp \circ \varphi_* = \varphi \circ \exp$)

Ratkaisu. (a) Homomorfismin ydin on normaali aliryhmä, eli $K \triangleleft G$. Toisaalta koska φ on derivoituva, se on myös jatkuva, joten K on suljettu, joten se on matriisiryhmä.

(b) Olkoon $\mathfrak{k}$ matriisiryhmän K Lien algebra.

Jos $X \in \mathfrak{k}$, niin on jokin derivoituva polku $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \to K$, $\alpha(0) = I$, $\alpha'(0) = X$. Kaikilla t, $\alpha(t) \in K$, jolloin edelleen $\varphi \circ \alpha(t) = I$. Näin ollen

$$\varphi_*(X) = \frac{d}{dt}\, \varphi \circ \alpha(t)\big|_{t=0} = \frac{d}{dt}\, I\big|_{t=0} = 0$$

joten $X \in \ker \varphi_*$. Koska X oli mielivaltainen, $\mathfrak{k} \subset \ker \varphi_*$.

Käänteisen inkluusion $\supset$ osoittamiseksi, kiinnitetään jokin $X \in \ker \varphi_* \subset \mathfrak{g}$. Tällöin $\alpha : \mathbb{R} \to G$, $\alpha(t) = \exp(tX)$ on derivoituva polku jolle $\alpha(0) = I$, $\alpha'(0) = X$. Lauseen 6.8 nojalla

$$\varphi \circ \alpha(t) = \varphi \circ \exp(tX) \overset{6.8}{=} \exp \circ \varphi_*(tX).$$

Toisaalta, koska $X \in \ker \varphi_*$, myös $tX \in \ker \varphi_*$, joten $\exp \circ \varphi_*(tX) = \exp(0) = I$.

Näin ollen $\alpha(t) \in \ker \varphi = K$, jolloin $X = \alpha'(0) \in \mathfrak{k}$. Jälleen koska X oli mielivaltainen, $\ker \varphi_* \mathfrak{k}$.

$\square$

3. Olkoon $\mathfrak{g}$ Lien algebra. Osoita, että

$$Z(\mathfrak{g}) = \{X \in \mathfrak{g} : \ [X, Y] = 0 \ \forall Y \in \mathfrak{g}\}$$

on ideaali $\mathfrak{g}$:ssä.

Ratkaisu. Tarkistetaan ensin, että $Z(\mathfrak{g})$ on vektorialiavaruus. Tämä seuraa suoraan Lien sulkeiden lineaarisuudesta.

(i) $0 \in Z(\mathfrak{g})$: $[0, Y] = 0 \ \forall Y \in \mathfrak{g}$ nojalla.

(ii) $A, B \in Z(\mathfrak{g}) \implies A + B \in Z(\mathfrak{g})$: $[A + B, Y] = [A, Y] + [B, Y] = 0 \ \forall Y \in \mathfrak{g}$.

(iii) $A \in Z(\mathfrak{g}), t \in \mathbb{K} \implies tA \in Z(\mathfrak{g})$: $[tA, Y] = t[A, Y] = 0 \ \forall Y \in \mathfrak{g}$.

Kommutaattoriehto $[Z(\mathfrak{g}), \mathfrak{g}] \subset Z(\mathfrak{g})$ taas seuraa välittömästi siitä, että

$$[Z, X] = 0 \in Z(\mathfrak{g})$$

kaikille $Z \in Z(\mathfrak{g})$ ja $X \in \mathfrak{g}$. $\square$

Jos $\mathfrak{g}$ ja $\mathfrak{h}$ ovat Lien algebroja, tuloalgebra $\mathfrak{g} \times \mathfrak{h}$ määritellään asettamalla Lien sulkeiksi komponenteittaiset sulkeet

$$[(X_1, Y_1), (X_2, Y_2)] = ([X_1, X_2]_{\mathfrak{g}}, [Y_1, Y_2]_{\mathfrak{h}}), \quad (X_1, Y_1), (X_2, Y_2) \in \mathfrak{g} \times \mathfrak{h}.$$

4. Olkoot $\mathfrak{g}$ ja $\mathfrak{h}$ yksinkertaisia Lien algebroja. Osoita, että

(a) $\mathfrak{g} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$.

(b) $\mathfrak{g} \times \mathfrak{h}$ ei ole yksinkertainen Lien algebra.

(c) $\mathfrak{g} \times \mathfrak{h} = [\mathfrak{g} \times \mathfrak{h}, \mathfrak{g} \times \mathfrak{h}]$.

Ratkaisu. (a) $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ on ideaali $\mathfrak{g}$:ssä. Koska $\mathfrak{g}$ on yksinkertainen, joko $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = 0$ tai $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = \mathfrak{g}$. Ensimmäinen tapaus ei ole mahdollinen sillä yksinkertaisuuden määritelmän mukaan $\mathfrak{g}$ ei ole abelinen. Näin ollen on oltava $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = \mathfrak{g}$.

(b) Osoitetaan, että esimerkiksi $\mathfrak{g} \times \{0\}$ on epätriviaali ideaali. Kaikille $(X_1, 0) \in \mathfrak{g} \times \{0\}$ ja $(X_2, Y_2) \in \mathfrak{g} \times \mathfrak{h}$,

$$[(X_1, 0), (X_2, Y_2)] = ([X_1, X_2]_{\mathfrak{g}}, [0, Y_2]_{\mathfrak{h}}) = ([X_1, X_2]_{\mathfrak{g}}, 0) \in \mathfrak{g} \times \{0\},$$

joten $\mathfrak{g} \times \{0\}$ on ideaali.

Toisaalta $\mathfrak{g}$ ja $\mathfrak{h}$ ovat yksinkertaisia, joten $\mathfrak{g}, \mathfrak{h} \neq 0$. Näin ollen

$$\{(0,0)\} \neq \mathfrak{g} \times \{0\} \neq \mathfrak{g} \times \mathfrak{h}$$

ja $\mathfrak{g} \times \{0\}$ on epätriviaali.

(c) Tuloalgebran sulkeiden määritelmän mukaan

$$[(X_1, Y_1), (X_2, Y_2)] = ([X_1, X_2], [Y_1, Y_2]) = ([X_1, X_2], 0) + (0, [Y_1, Y_2]).$$

Tällöin (a)-kohdan nojalla

$$\begin{aligned}
[\mathfrak{g} \times \mathfrak{h}, \mathfrak{g} \times \mathfrak{h}] &= \operatorname{span}\{[(X_1, Y_1), (X_2, Y_2)] :\ X_1, X_2 \in \mathfrak{g}, Y_1, Y_2 \in \mathfrak{h}\} \\
&= \operatorname{span}\{([X_1, X_2], 0) :\ X_1, X_2 \in \mathfrak{g}\} \oplus \operatorname{span}\{(0, [Y_1, Y_2]) :\ Y_1, Y_2 \in \mathfrak{h}\} \\
&= ([\mathfrak{g}, \mathfrak{g}], 0) \oplus (0, [\mathfrak{h}, \mathfrak{h}]) \\
&= (\mathfrak{g}, 0) \oplus (0, \mathfrak{h}) \\
&= \mathfrak{g} \times \mathfrak{h}.
\end{aligned}$$

□

Seuraavissa tehtävissä tarkastellaan homomorfismia $R : \mathrm{SU}(2) \to \mathrm{SO}(3)$, joka määriteltiin kvaterniotulon kautta: yksikkökvaterniolle $q \in \mathrm{SU}(2)$ tulkitaan $\mathbb{R}^3$ imaginäärikvaternioiden avaruutena ja määritellään kuvaus kvaterniotulona

$$R(q) : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad \Big(R(q)\Big)(x) = qxq^{-1}.$$

Muista, että kvaterniotulo on itsessään matriisitulo kun imaginäärikvaternio $x = x_1\mathbf{i} + x_2\mathbf{j} + x_3\mathbf{k}$ kirjoitetaan muodossa

$$x = \begin{bmatrix} x_3 i & -x_1 - x_2 i \\ x_1 - x_2 i & -x_3 i \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{C}).$$

Tehtäväsarjan tavoitteena on löytää lauseke derivaatalle $R_* : \mathfrak{su}(2) \to \mathfrak{so}(3)$.

5. $\mathfrak{su}(2)$:lla on kanta

$$E_1 = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}, \quad E_2 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_3 = \begin{bmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{bmatrix}.$$

Osoita, että kuvauksen $R_* : \mathfrak{su}(2) \to \mathfrak{so}(3)$ lauseke määräytyy täysin pelkästään kuvapisteiden $R_*(E_1)$ ja $R_*(E_2)$ avulla.

Ratkaisu. Koska $R : \mathrm{SU}(2) \to \mathrm{SO}(3)$ on derivoituva homomorfismi, $R_* : \mathfrak{su}(2) \to \mathfrak{so}(3)$ on Lien algebrojen morfismi. Erityisesti se on lineaarinen, joten R_* määräytyy täysin kantamatriisien kuvista $R_*(E_1), R_*(E_2), R_*(E_3)$.

Toisaalta suora lasku Lien algebrassa $\mathfrak{su}(2)$ antaa

$$[E_2, E_1] = 2E_3.$$

Koska R_* säilyttää Lien sulkeet, tällöin

$$R_*(E_3) = R_*\left(\frac{1}{2}[E_2, E_1]\right) = \frac{1}{2}[R_*(E_2), R_*(E_1)]$$

□

6. Olkoon $t \in \mathbb{R}$ ja $x = x_1\mathbf{i} + x_2\mathbf{j} + x_3\mathbf{k} \in \mathbb{R}i + \mathbb{R}j + \mathbb{R}k$.

(a) Määritä matriisit $\exp(tE_1) \in \mathrm{SU}(2)$ ja $\exp(tE_2) \in \mathrm{SU}(2)$.

(b) Määritä lausekkeet vektoreille $\Big(R(\exp(tE_1))\Big)(x) \in \mathbb{R}i+\mathbb{R}j+\mathbb{R}k$ ja $\Big(R(\exp(tE_2))\Big)(x) \in \mathbb{R}i + \mathbb{R}j + \mathbb{R}k$.

Ratkaisu. (a) Diagonaalimatriisin eksponentiaali on alkioittainen eksponentiaali

$$\exp(tE_1) = \begin{bmatrix} e^{it} & 0 \\ 0 & e^{-it} \end{bmatrix}.$$

Matriisille tE_2 eksponentiaali taas saadaan kompleksisen upotuksen kautta

$$\exp(tE_2) = \exp \circ \rho(it) = \rho(e^{it}) = \begin{bmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{bmatrix}$$

(b) Vektorit $R(\exp(tE_1))x$ saadaan kvaterniotulona

$$\begin{aligned} R(\exp(tE_1))x &= \exp(tE_1)x\exp(-tE_1) \\ &= \begin{bmatrix} e^{it} & 0 \\ 0 & e^{-it} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_3 i & -x_1 - x_2 i \\ x_1 - x_2 i & -x_3 i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-it} & 0 \\ 0 & e^{it} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} x_3 i & -x_1 e^{2it} - x_2 e^{2it} i \\ x_1 e^{-2it} - x_2 e^{-2it} i & -x_3 i \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Laajentamalla $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ saadaan

$$-x_1 e^{2it} - x_2 e^{2it} i = -(x_1\cos(2t) - x_2\sin(2t)) - (x_2\cos(2t) + x_1\sin(2t))i.$$

Lukemalla tämä kvaterniomuodossa saadaan

$$R(\exp(tE_1))x = (x_1\cos(2t) - x_2\sin(2t))\mathbf{i} + (x_2\cos(2t) + x_1\sin(2t))\mathbf{j} + x_3\mathbf{k}.$$

Vastaava lasku matriisille $\exp(tE_2)$ hyödyntäen kaavoja

$$\cos(2t) = \cos^2 t - \sin^2 t \text{ ja } \sin(2t) = 2\sin t\cos t$$

antaa

$$\begin{aligned}
R(\exp(tE_2))x &= \exp(tE_2)x\exp(-tE_2) \\
&= \begin{bmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_3 i & -x_1 - x_2 i \\ x_1 - x_2 i & -x_3 i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} (x_3\cos(2t) + x_2\sin(2t))i & -x_1 - (x_2\cos(2t) - x_3\sin(2t))i \\ x_1 - (x_2\cos(2t) - x_3\sin(2t))i & -(x_3\cos(2t) + x_2\sin(2t))i \end{bmatrix} \\
&= x_1\mathbf{i} + (x_2\cos(2t) - x_3\sin(2t))\mathbf{j} + (x_3\cos(2t) + x_2\sin(2t))\mathbf{k}.
\end{aligned}$$

□

7. (a) Muodosta matriisien $R(\exp(tE_1)) \in \mathrm{SO}(3)$ ja $R(\exp(tE_1)) \in \mathrm{SO}(3)$ lausekkeet.

(b) Määritä matriisit $R_*(E_1) \in \mathfrak{so}(3)$ ja $R_*(E_2) \in \mathfrak{so}(3)$.

Ratkaisu. (a) Vektori

$$R(\exp(tE_1))x = (x_1\cos(2t) - x_2\sin(2t))\mathbf{i} + (x_2\cos(2t) + x_1\sin(2t))\mathbf{j} + x_3\mathbf{k}$$

vastaa matriisituloa

$$R(\exp(tE_1)) \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}.$$

Tästä saadaan matriisi

$$R(\exp(tE_1)) = \begin{bmatrix} \cos(2t) & -\sin(2t) & 0 \\ \sin(2t) & \cos(2t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Vastaavasti vektorista

$$R(\exp(tE_2))x = x_1\mathbf{i} + (x_2\cos(2t) - x_3\sin(2t))\mathbf{j} + (x_3\cos(2t) + x_2\sin(2t))\mathbf{k}$$

saadaan matriisi

$$R(\exp(tE_2)) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(2t) & -\sin(2t) \\ 0 & \sin(2t) & \cos(2t) \end{bmatrix}.$$

(b) Derivaatan R_* määritelmän mukaan

$$R_*(E_j) = \frac{d}{dt}\, R(\exp(tE_j)|_{t=0}\,.$$

Derivoimalla (a)-kohdan matriisit pisteessä $t = 0$, saadaan

$$R_*(E_1) = \frac{d}{dt}\, R \circ \exp(tE_1)|_{t=0} = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ ja}$$

$$R_*(E_2) = \frac{d}{dt}\, R \circ \exp(tE_1)|_{t=0} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 0. \end{bmatrix}$$

□

8. Määritä kuvauksen $R_* : \mathfrak{su}(2) \to \mathfrak{so}(3)$ lauseke $\mathfrak{su}(2)$:n kannassa $\{E_1, E_2, E_3\}$, eli määritä matriisi $R_*(aE_1 + bE_2 + cE_3) \in \mathfrak{so}(3)$, $a, b, c \in \mathbb{R}$.

Ratkaisu. Viimeisen kantamatriisin kuva saadaan edellä laskettujen kommutaattorista

$$R_*(E_3) = R_*(\frac{1}{2}[E_2, E_1]) = \frac{1}{2}[R_*(E_2), R_*(E_1)] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Kokonaisuudessaan kuvaus R_* on siis

$$R_*(aE_1 + bE_2 + cE_3) = R_*\left(\begin{bmatrix} ai & -b + ci \\ b + ci & -ai \end{bmatrix}\right) = 2\begin{bmatrix} 0 & -a & -c \\ a & 0 & -b \\ c & b & 0 \end{bmatrix}.$$

□