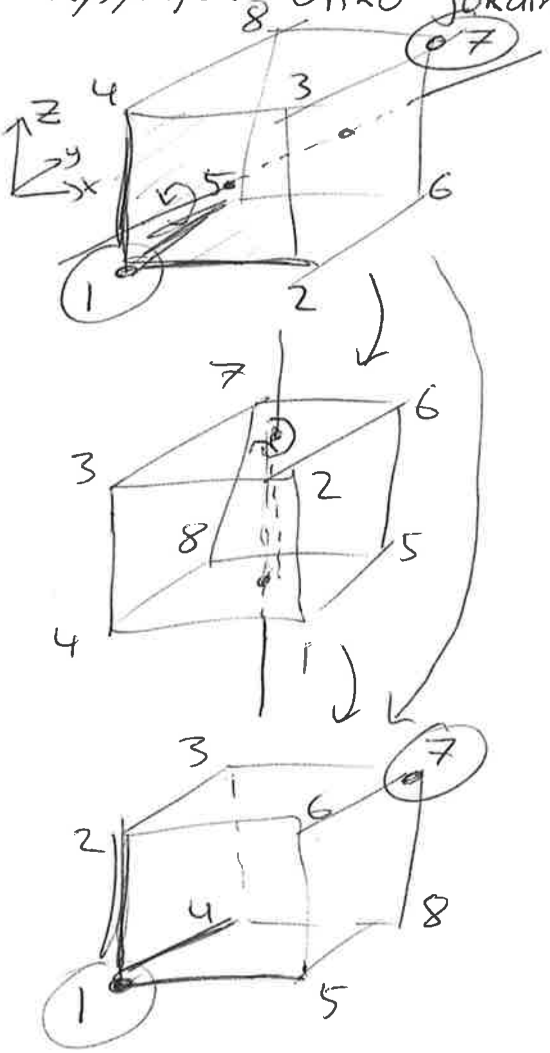
Kurssin tarkoitus: tutustua Lien teoriaan hautautumatta esitietoihin (diff. geometria, topologia, ...)

<u>Lien teoria:</u> (Sophus Lie, 1842–1899, Norja)
jatkuvien symmetriaperheiden tarkastelua algebrallisia ja geometrisia menetelmiä yhdistäen.

<u>Esim</u>

Kuution vs. pallon kierrot

Kysymys: Onko jokainen kierto kierto akselin suhteen?



kierto A = 90° y-akselin suhteen

kierto B = 90° z-akselin suhteen

kierto B ∘ A = 120° (x+y+z)-akselin suhteen

Kuution kiertoja on äärellinen määrä ($24 = \#S_4$)

$\Rightarrow$ kysymykseen voi vastata pelkällä laskuteholla.

Pallon kiertoja on ääretön määrä. Kuitenkin matriisiryhmien avulla saadaan näppärästi vastaus.

Kurssin sisältö

I Matriisiryhmät (Lien ryhminä)

- tärkeitä esimerkkejä (kiertoryhmät jne) paljon käytetyistä matriisiryhmistä

II Matriisieksponentiaali ja -logaritmi

- Lien algebra $\leftrightarrow$ ryhmä vastaavuuteen konkreettinen ilmentymä

III Lien algebra $\leftrightarrow$ Lien ryhmä vastaavuus

- miten jatkuvuus ja derivoituvuus auttavat ryhmän tarkastelua
- epälineaaristen ongelmien muuttaminen lineaarisiksi menettämättä lainkaan/juurikaan informaatiota

I Matriisiryhmät

I.1. Matriisiavaruudet

Kurssilla tarkastellaan sekä reaalisia että kompleksisia avaruuksia. Suurin osa väittämistä ei välitä onko kyseessä $\mathbb{R}$ vai $\mathbb{C}$, jolloin käytetään merkintää $\mathbb{K}$.

Määr 1.1

$$\mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{K}) = \left\{ \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix} : a_{jk} \in \mathbb{K} \right\}$$

on kaikkien n-rivisten, m-sarakkeisten, $\mathbb{K}$-kertoimisten matriisien avaruus.

Matriisin $A \in \mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{K})$ rivin r sarakkeen s alkiota merkitään A_{rs} tai a_{rs}.

Tämän kurssin kannalta 2 tärkeää näkökulmaa $\mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{K})$:n.

(1) $\mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{K})$ on $\mathbb{K}$-vektoriavaruus ja $\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{K}) = n \cdot m$

(2) Kun $n=m$, $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K}) = \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ on rengas kertolaskulla

$$AB = [A_{rs}]_{rs} \cdot [B_{rs}]_{rs} = \left[\sum_{k=1}^{n} A_{rk} B_{ks} \right]_{rs}$$

(1) $\Rightarrow$ Topologia (jatkuvuus, avoimet joukot, ...)
Sileä struktuuri (derivoituvuus)

(2) $\Rightarrow$ algebralliset ominaisuudet

$\Rightarrow$ Lien teorian ainesosat

Olennaisia käsitteitä

(1)	(2)
avoin joukko	homomorfismi
suljettu joukko	ydin ja kuvajoukko
jatkuva kuvaus	(normaali) aliryhmä
(polku)yhtenäinen joukko	toiminto
kompakti joukko	

Matriisien tulkinta lineaarikuvauksina

Merkitään $e_j = (0, \ldots, 0, \underbrace{1}_{j\text{:s alkio}}, 0, \ldots, 0)$ $\mathbb{K}^m$:n standardikannan alkioita ja samaistetaan

vektori $x = x_1 e_1 + \ldots + x_m e_m \in \mathbb{K}^m$ ja sarakematriisi $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix} \in M_{m\times 1}(\mathbb{K})$

Matriisi $A \in M_{n\times m}(\mathbb{K})$ antaa lineaarikuvauksen

$A: \mathbb{K}^m \to \mathbb{K}^n$ $\quad A(x) = {}^LA(x) = Ax = \begin{bmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1m} \\ \vdots & & \\ a_{n1} & \ldots & a_{nm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^m a_{1k} x_k \\ \vdots \\ \sum_{k=1}^m a_{nk} x_k \end{bmatrix} = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^m a_{jk} x_k \underbrace{e_j}_{\in \mathbb{K}^n}$$

Matriisien tulo vastaa kuvausten yhdistämistä

$A \in M_{n\times m}(\mathbb{K})$ $\quad B \in M_{k\times m}(\mathbb{K})$ $\quad BA \in M_{k\times m}(\mathbb{K})$

$A: \mathbb{K}^m \to \mathbb{K}^n$ $\quad B: \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^k$ $\quad B\circ A: \mathbb{K}^m \to \mathbb{K}^k$

I.2. Yleinen lineaarinen ryhmä ja matriisiryhmät

Määr 2.1 (topologinen ryhmä)

Joukko G varustettuna laskutoimituksella $G \times G \to G$ on ryhmä jos

(i) laskutoimitus on assosiatiivinen: $x(yz) = (xy)z$

(ii) $\exists$ neutraalialkio $e \in G$: $xe = x = ex$

(ii) $\forall x \in G$ $\exists$ käänteisalkio $x^{-1} \in G$: $xx^{-1} = e = x^{-1}x$

G on topologinen ryhmä, jos lisäksi

(iv) laskutoimitus $(x,y) \mapsto xy$ on jatkuva

(v) käänteiskuvaus $x \mapsto x^{-1}$ on jatkuva

Huom

Joukolle jatkuvuudesta puhuminen ei ole järkevää, tarvitaan topologia. Tällä kurssilla ~~t~~topologia (eli erityisesti jatkuvuuden käsite) periytyy inkluusiosta

$$M_n(\mathbb{K}) \subset \mathbb{K}^{n^2}$$

Määr 2.2 Yleinen lineaarinen ryhmä

on matriisiavaruuden osajoukko

$$GL(n,\mathbb{K}) = \{A \in M_n(\mathbb{K}) : \exists A^{-1}\}$$

varustettuna matriisien kertolaskulla.

Lause 2.3

Yleinen lineaarinen ryhmä on topologinen ryhmä

Todistus

(i) Olk $A, B, C \in GL(n, \mathbb{K})$.

Assosiatiivisuuden voi tarkistaa suoraan matriisitulon määritelmän kautta pienellä indeksipuljauksella, mutta Lineaarikuvaustulkinta on tässä näppärä:

$$\forall x \in \mathbb{K}^n \simeq M_{n\times 1}(\mathbb{K}) \quad (AB)Cx = (A\circ B)\circ C(x)$$
$$= A(B(C(x)))$$
$$= A\circ (B\circ C)(x)$$
$$= A(BC)x$$

$$\Rightarrow (AB)C = A(BC)$$

(ii) $\forall A \in GL(n, \mathbb{K}): \quad AI = A = IA$

(iii) $\forall A \in GL(n, \mathbb{K}) \quad \exists A^{-1}$ joukon $GL(n, \mathbb{K})$ määr perusteella

(iv) Jatkuvuustarkasteluja varten huom

$f = (f_1, \dots, f_n): \mathbb{K}^m \to \mathbb{K}^n$ jva $\Leftrightarrow$ jokainen $f_j: \mathbb{K}^m \to \mathbb{K}$ jva

Matriisikertolasku on jatkuvuustarkastelun kannalta kuvaus

$$\text{mult}: \mathbb{K}^{2n^2} \to \mathbb{K}^{n^2}, \quad \text{mult}(a_{11}, \dots, a_{nn}, b_{11}, \dots, b_{nn})$$
$$= \left(\sum_{k=1}^n a_{1k} b_{k1}, \dots, \sum_{k=1}^n a_{nk} b_{kn} \right)$$

Jokainen komponenttikuvaus $\text{mult}_{rs}: \mathbb{K}^{2n^2} \to \mathbb{K}$ on siis polynomi, ja siten jva $\Rightarrow$ mult jva.

(v) Käänteiskuvauksen jatkuvuus saadaan vastaavasti käyttäen käänteismatriisin ~~liitto~~matriisiesitystä:

$$A^{-1} = \frac{\text{adj}(A)}{\det(A)}$$

missä liittomatriisin adj(A) rivin r sarakkeen s komponentti on

$$\operatorname{adj}(A)_{rs} = (-1)^{r+s} \det \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & \cancel{a_{1r}} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \cancel{\vdots} & & \vdots \\ \cancel{a_{s1}} & \cancel{\cdots} & \cancel{a_{sr}} & \cancel{\cdots} & \cancel{a_{sn}} \\ \vdots & & \cancel{\vdots} & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & \cancel{a_{nr}} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Näin ollen käänteiskuvauksen jatkuvuus seuraa determinantin jatkuvuudesta. ($\det : M_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ on polynomi) $\square$

Determinantin jatkuvuus kertoo enemmänkin $GL(n,\mathbb{K})$:n rakenteesta:

Lause 2.4

$GL(n,\mathbb{K}) \subset M_n(\mathbb{K})$ on avoin.

Todistus

Käänteismatriisi on olemassa $\Leftrightarrow \det \neq 0$, eli

$$GL(n,\mathbb{K}) = \det^{-1}(\mathbb{K} \setminus \{0\})$$

ja $\mathbb{K} \setminus \{0\} \subset \mathbb{K}$ on avoin, ja avoimen joukon alkukuva on avoin.

Lause 2.5

$GL(n,\mathbb{R})$ on epäyhtenäinen.

Määr 2.6

Joukko $X \subset \mathbb{K}^n$ on epäyhtenäinen jos $\exists\, U, V \subset \mathbb{K}^n$ s.e.

(i) $X = U \cup V$

(ii) U, V avoimia X:n suhteen

(iii) $U, V \neq \emptyset$

Lauseen 2.5 todistus

Asetetaan

$$U = \det^{-1}(\{x \in \mathbb{R} : x < 0\}) \quad \text{ja}$$
$$V = \det^{-1}(\{x \in \mathbb{R} : x > 0\})$$

(i) $U \cup V = \det^{-1}(\mathbb{R} \setminus \{0\}) = GL(n, \mathbb{R})$

(ii) U ja V ovat avoimia koska $(-\infty, 0)$ ja $(0, \infty)$ ovat avoimia.

(iii) $\det I = 1 \Rightarrow I \in V \neq \emptyset$ ja

$$\det \begin{bmatrix} -1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{bmatrix} = -1 \Rightarrow \begin{bmatrix} -1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{bmatrix} \in U \neq \emptyset \qquad \square$$

Huom

$\mathbb{C} \setminus \{0\}$ on yhtenäinen, joten determinantin tarkastelu ei kerro mitään $GL(n, \mathbb{C})$:n yhtenäisyydestä. Toisaalta ei myöskään tiedetä edellisen perusteella vielä mitään $GL(n, \mathbb{R})$:n yhtenäisyyskomponenttien määrästä kuin että niitä on vähintään 2.

Yhtenäisyyskysymyksiin palataan myöhemmin kurssilla.

Määr 2.7 (matriisiryhmä)

Mikä tahansa yleisen lineaarisen ryhmän $GL(n,\mathbb{K})$ suljettu aliryhmä on matriisiryhmä.

Oletus, että $G < GL(n,\mathbb{K})$ on suljettu rajaa pois tiettyjä "huonosti käyttäytyviä" tapauksia, joissa haluttu algebran ja geometrian yhteys hajoaa.

Esim 2.8

Olkoon

$$G = \Bigg\{ \overbrace{\begin{bmatrix} e^{it} & 0 \\ 0 & e^{i\pi t} \end{bmatrix}}^{=:A_t} ;\ t \in \mathbb{R} \Bigg\} \subset GL(2,\mathbb{C}).$$

Tämä on aliryhmä, sillä $e^{it} \cdot e^{is} = e^{i(t+s)}$, joten

$$A_t \cdot A_s = A_{t+s} \in G \quad \forall A_t, A_s \in G \text{ ja}$$

$$I = A_0 \in G$$

Vaikka funktio $\mathbb{R} \to \mathbb{C};\ t \mapsto e^{it}$ on periodinen, eli erityisesti ei ole injektiivinen, funktio $\mathbb{R} \to G : t \mapsto A_t$ on injektiivinen:

$$A_t = A_s \iff \left\{ \begin{array}{ll} e^{it} = e^{is} & \iff t = s + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z} \\ e^{i\pi t} = e^{i\pi s} & \iff t = s + 2m,\ m \in \mathbb{Z} \end{array} \right\} \iff t = s$$

Erityisesti ryhmänä $G \overset{\text{kom}}{\simeq} (\mathbb{R},+)$.

Topologisesti G ei kuitenkaan käyttäydy kuten $\mathbb{R}$: kokonaisluvulle $k \in \mathbb{Z}$

$$A_{2k+1} = \begin{bmatrix} e^{i(2k+1)} & 0 \\ 0 & e^{i\pi(2k+1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{i(2k+1)} & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \in G$$

Sopivalle osajonolle $e^{i(2j_k+1)} \to 1$, mutta $-I \notin G$

$\Rightarrow -I \in \overline{G} \setminus G \Rightarrow G$ ei suljettu

TO 11.1

1

Viimeksi:

- määriteltiin topologinen ryhmä $GL(n, \mathbb{K})$ ja matriisiryhmä
- $GL(n,\mathbb{K})$:n ominaisuuksia:
  - topologinen ryhmä
  - $GL(n,\mathbb{K}) \subset \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ on avoin
  - $GL(n,\mathbb{R})$ on epäyhtenäinen

Määr 2.9 (topologisten ryhmien morfismit ja isomorfismit)

Jos G ja H ovat topologisia ryhmiä, niin $\varphi: G \to H$ on topologisten ryhmien morfismi, jos φ on jatkuva homomorfismi.

Jos φ on ryhmäisomorfismi, ja φ^{-1} on myös jatkuva, niin topologiset ryhmät G ja H ovat isomorfiset

Lause 2.10

$\det: GL(n,\mathbb{K}) \to \mathbb{K}^* = (\mathbb{K}\setminus\{0\}, \cdot)$ on jatkuva homomorfismi

Todistus

det on polynomiaalinen $\Rightarrow$ det on jatkuva, ja

$$\det(AB) = \det A \cdot \det B$$

Seuraus 2.11

$\{A \in GL(n,\mathbb{K}) : \det A = 1\}$ on matriisiryhmä, ja on $GL(n,\mathbb{K})$:n normaali aliryhmä.

Todistus

$\{A \in GL(n,\mathbb{K}) : \det A = 1\} = \ker \det$.

Homomorfismin ydin on normaali aliryhmä, ja suljetun joukon $\{1\} \in \mathbb{K}^*$ alkukuva on suljettu

Määr 2.12 Erityinen lineaarinen ryhmä

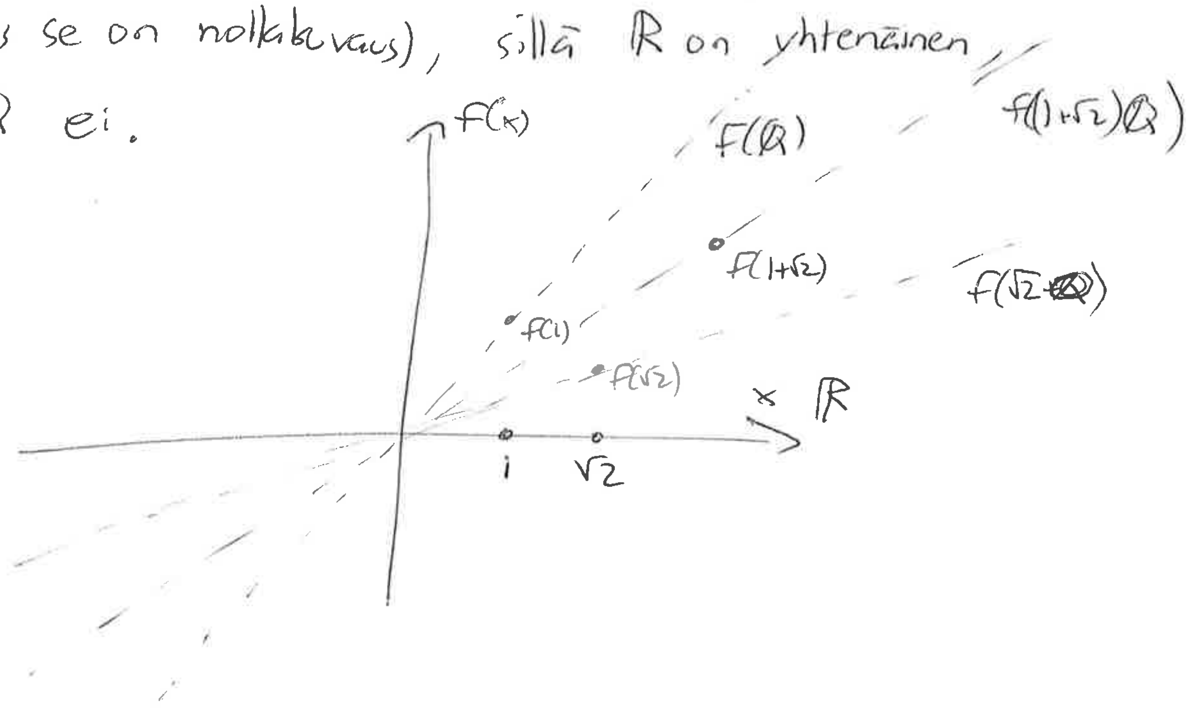
on $SL(n,\mathbb{K}) = \{A \in GL(n,\mathbb{K}) : \det A = 1\}$.

Epäjatkuvat homomorfismit ovat yleensä patologisempia kuin ei-suljetut aliryhmät. Esim matriisiavaruuksien välille on vaikeaa konstruoida vahingossa mitään epäjatkuvaa homomorfismia.

Valinta-aksiooma $\Rightarrow \exists$ epätriviaali (eli ei nollakuvaus) homomorfismi $(\mathbb{R},+) \to (\mathbb{Q},+)$

(Konstruktio: käsitellään $\mathbb{R}$:ää $\mathbb{Q}$-vektoriavaruutena. Koska $\dim_{\mathbb{Q}} \mathbb{R} = \infty$, $\mathbb{Q}$-lineaarikuvauksilla $\mathbb{R} \to \mathbb{Q}$ saadaan patologisia homomorfismeja)

Homomorfismi $(\mathbb{R},+) \to (\mathbb{Q},+)$ ei voi olla jatkuva (paitsi jos se on nollakuvaus), sillä $\mathbb{R}$ on yhtenäinen, mutta $\mathbb{Q}$ ei.



TO 11.1
3

Matriisiryhmien upotukset

Määr 2.13

Olk G, H matriisiryhmiä.
Matriisiryhmän G upotus matriisiryhmään H on jatkuva injektiivinen homomorfismi $\varphi : G \to H$, jolle $\varphi(G) < H$ on suljettu.

Kompleksiset matriisiryhmät voidaan aina upottaa isompiin reaalisiin matriisiryhmiin.

Lause 2.14

$\rho : \mathbb{C} \to M_2(\mathbb{R})$, $\rho(a+bi) = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$

on injektiivinen jatkuva rengashomomorfismi, ja $\rho(\mathbb{C})$ on suljettu.

Tod

Homomorfismi:

$$\rho(a+bi+c+di) = \begin{pmatrix} a+c & -b-d \\ b+d & a+c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c & -d \\ d & c \end{pmatrix}$$

$$\rho\big((a+bi)\cdot(c+di)\big) = \rho(ac-bd+(ac+bd)i) = \begin{pmatrix} ac-bd & -ad-bc \\ ad+bc & ac-bd \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c & -d \\ d & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ac-bd & -ad-bc \\ ad+bc & ac-bd \end{pmatrix}$$

$$\rho(1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

Injektiivisyys näkyy ensimmäisessä sarakkeessa ja jatkuvuus seuraa komponenttikuvausten $(a+bi) \mapsto a$ ja $\mapsto \pm b$ jatkuvuudesta.

$\rho(\mathbb{C})$ on suljettu:

Jos $\begin{pmatrix} a_k & -b_k \\ b_k & a_k \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$,

niin raja-arvon yksikäsitteisyyden nojalla $c_{11} = c_{22} = \lim a_k$ ja $-c_{12} = +c_{21} = \lim b_k$. $\square$

Lause 2.15

$$\psi : GL(n,\mathbb{C}) \to GL(2n,\mathbb{R})$$
$$[a_{rs}] \mapsto [\rho(a_{rs})]$$

on matriisiryhmän $GL(n,\mathbb{C})$ upotus.

Lemma 2.16 (blokkimatriisien tulo)

Jos A_{rs}, $r=1,\dots,n$, $s=1,\dots,m$ ja
B_{rs}, $r=1,\dots,m$, $s=1,\dots,p$ ovat
$\mathbb{K}$-kertoimisia matriiseja siten, että jokainen matriisitulo
$A_{rk}B_{ks}$ on määritelty, niin

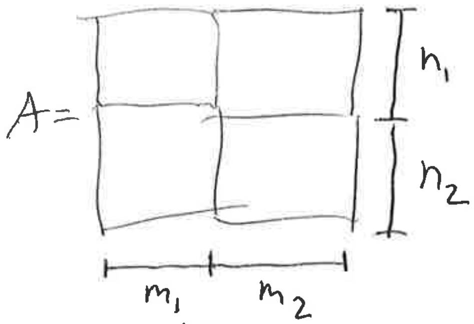
$$\begin{bmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{n1} & \cdots & A_{nm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_{11} & \cdots & B_{1p} \\ \vdots & & \vdots \\ B_{m1} & \cdots & B_{mp} \end{bmatrix} = \left[\sum_{k=1}^{m} A_{rk} B_{ks} \right]_{\substack{r=1,\dots,n \\ s=1,\dots,p}}$$

Todistus

Todistetaan väite yksinkertaisuuden vuoksi kun blokkeja on 2×2,

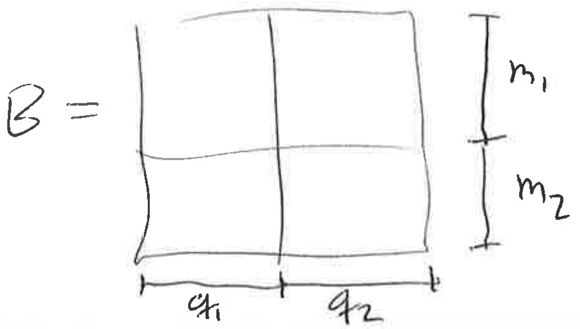
$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix}$$

Matriisitulojen yhteensopivuuden nojalla jos A:n blokit ovat



, joillekin $n_1, n_2, m_1, m_2 \in \mathbb{N}$

niin B:n blokit ovat



joillekin $q_1, q_2 \in \mathbb{N}$

Matriisin A alkioille saadaan indeksien vastaavuudet

	$1 \le s \le m_1$	$m_1 < s \le m_2 + m_1$
$1 \le r \le n_1$	$a_{rs} = (A_{11})_{rs}$	$a_{rs} = (A_{12})_{r,s-m_1}$
$n_1 < r \le n_1+n_2$	$a_{rs} = (A_{21})_{r-n_1,s}$	$a_{rs} = (A_{22})_{r-n_1,s-m_1}$

ja matriisin B alkioille b_{rs} saadaan vastaava taulukko.

Matriisitulon AB r,s alkio on

$$(AB)_{rs} = \sum_{k=1}^{m_1+m_2} a_{rk} b_{ks} = \sum_{k=1}^{m_1} a_{rk} b_{ks} + \sum_{k=m_1+1}^{m_2+m_1} a_{rk} b_{ks}$$

käydään läpi tapaus $r \le n_1$, $q_1 < s \le q_2$.

Muut tapaukset ovat vastaavia.

$$\sum_{k=1}^{m_1} a_{rk} b_{ks} \overset{1 \le k \le m_1}{=} \sum_{k=1}^{m_1} (A_{11})_{rk} (B_{12})_{k,s-q_1} \quad \text{ja}$$

$$\sum_{k=1+m_1}^{m_2+m_1} a_{rk} b_{ks} \overset{m_1 < k \le m_1+m_2}{=} \sum_{k=1+m_1}^{m_2+m_1} (A_{12})_{r,k-m_1} (B_{22})_{k-m_1,s-q_1}$$

$$= \sum_{k=1}^{m_2} (A_{12})_{r,k} (B_{22})_{k,s-q_1}$$

Siis

$$(AB)_{rs} = (A_{11}B_{12})_{r,s-q_1} + (A_{12}B_{22})_{r,s-q_1}. \qquad \square$$

$\mathbb{R}$-vektoriavaruutena $\mathbb{C}^n \simeq \mathbb{R}^{2n}$. Tämän vastaavuuden antaa

$\Phi : \mathbb{C}^n \to \mathbb{R}^{2n}$, $\Phi(a_1 + b_1 i, \ldots, a_n + b_n i) = (a_1, b_1, a_2, b_2, \ldots, a_n, b_n)$

Lemma 2.17

Kaikille $A \in M_n(\mathbb{C})$

$$\Phi \circ A = \Psi(A) \circ \Phi$$

$$\begin{tikzcd} \mathbb{C}^n \arrow[r, "\Phi"] \arrow[d, "A"'] & \mathbb{R}^{2n} \arrow[d, "\Psi(A)"] \\ \mathbb{C}^n \arrow[r, "\Phi"] & \mathbb{R}^{2n} \end{tikzcd}$$

Tod
HT

TO 11.1
6

Lauseen 2.15 todistus

Pitää todistaa, että $\psi : GL(n,\mathbb{C}) \to GL(2n,\mathbb{R})$ on injektiivinen jatkuva homomorfismi, jonka kuvajoukko on suljettu.

Injektiivisyys jatkuvuus seuraavat suoraan kuvauksen $\rho : \mathbb{C} \to M_2(\mathbb{R})$ injektiivisyydestä ja jatkuvuudesta.

Homomorfismi!

$$\psi(A)\psi(B) \overset{\text{Lemma 2.16}}{=} \Big[\sum_{k=1}^{n} \rho(a_{rk})\rho(b_{ks})\Big]_{rs}$$

$$\overset{\text{Lause 2.14}}{=} \Big[\rho\Big(\sum_{k=1}^{n} a_{rk} b_{ks}\Big)\Big]_{rs}$$

$$= \big[\rho((AB)_{rs})\big]_{rs} = \psi(AB)$$

Suljettu kuvajoukko!

Oletetaan että $A_k \in GL(n,\mathbb{C})$ on jono, jolle $\psi(A_k) \to B \in GL(2n,\mathbb{R})$.
Kirjoittaen B blokkimatriisina 2×2 blokeista B_{rs},

$$\rho((A_k)_{rs}) \to B_{rs}$$

Lauseen 2.14 nojalla $\rho(\mathbb{C})$ on suljettu ja ρ injektio, joten $(A_k)_{rs} \to a_{rs} \in \mathbb{C}$.
Näin ollen $A_k \to A = [a_{rs}]_{rs} \in M_n(\mathbb{C})$, joten riittää osoittaa että A on kääntyvä.

Lemman 2.17 nojalla lineaarikuvauksena

$$A \text{ kääntyvä} \Leftrightarrow \psi(A) = B \text{ kääntyvä},$$

ja oletuksen mukaan $B \in GL(2n,\mathbb{R})$. $\square$

TO 11.1

7

Lause 2.18

(1) $GL(n,\mathbb{K}) \to GL(n+m,\mathbb{K})$ on upotus

$$A \mapsto \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & I_m \end{pmatrix}$$

(2) $GL(n,\mathbb{K}) \times GL(m,\mathbb{K}) \to GL(n+m,\mathbb{K})$ on upotus

$$(A, B) \mapsto \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}.$$

Todistus

(2) $\Rightarrow$ (1): $GL(n,\mathbb{K}) \to GL(n,\mathbb{K}) \times \{I_m\} < GL(n,\mathbb{K}) \times GL(m,\mathbb{K})$ on upotus.

(2): Injektiivisyys ja jatkuvuus seuraavat välittömästi.

Homomorfisuus seuraa Lemmasta 2.16:

$$\begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & B_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A_2 & 0 \\ 0 & B_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 A_2 & 0 \\ 0 & B_1 B_2 \end{pmatrix}$$

Suljettu kuvajoukko:

$$\begin{pmatrix} A_k & 0 \\ 0 & B_k \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} C & D \\ E & F \end{pmatrix} \Rightarrow D = 0, E = 0$$

Seuraus 2.19

Matriisiryhmien tulo on matriisiryhmä.

Todistus

Olk $G < GL(n, \mathbb{K}_1)$ ja $H < GL(m, \mathbb{K}_2)$ matriisiryhmiä. Dimensioiden n ja m ja kerroinkuntien $\mathbb{K}_1$ ja $\mathbb{K}_2$ ei tarvitse olla samat.

Lauseiden 2.15 ja 2.18(1) nojalla, voidaan upottaa

$$G \hookrightarrow GL(2n, \mathbb{R}) \quad \text{ja} \quad H \hookrightarrow GL(2m, \mathbb{R})$$

Jos $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $\quad 2.18 \Rightarrow GL(n, \mathbb{R}) \hookrightarrow GL(2n, \mathbb{R})$

Jos $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, $\quad 2.15 \Rightarrow GL(n, \mathbb{C}) \hookrightarrow GL(2n, \mathbb{R})$

Edelleen lauseen 2.18 (2) nojalla

$$G \times H \hookrightarrow GL(2n, \mathbb{R}) \times GL(2n, \mathbb{R}) \hookrightarrow GL(2(n+m), \mathbb{R}),$$

joten $G \times H$ on isomorfinen $GL(2n+2n, \mathbb{R})$:n johonkin suljettuun aliryhmään.

Siis $G \times H$ on matriisiryhmä.

Erityisen ja yleisen lineaarisen ryhmän yhteys

Lause 2.20

$$GL(n,\mathbb{K}) \simeq SL(n,\mathbb{K}) \rtimes GL(1,\mathbb{K}) \simeq SL(n,\mathbb{K}) \rtimes \mathbb{K}^*$$

Määr 2.21 (puolisuora tulo)

Ryhmä G on aliryhmien $N<G$ ja $H<G$ puolisuora tulo, merkitään $G = N \rtimes H$, jos

(i) $G = NH = \{nh : n\in N,\ h\in H\}$,

(ii) $N \triangleleft G$ ja

(iii) $N \cap H = \{e\}$

Huom

(1) Vertaa tuloryhmän $G = N \times H$ määritelmään.
Tuloryhmässä laskutoimituksena on

$$(n_1, h_1)\cdot(n_2, h_2) = (n_1n_2, h_1h_2)$$

Joukot

$$\tilde{N} = N \times \{e_H\} < G \quad \text{ja} \quad \tilde{H} = \{e_N\}\times H < G$$

ovat ryhmän G aliryhmiä, joille

(i) $\tilde{N}\tilde{H} = \{(n,e_H)\cdot(e_N\cdot h) = (n,h) : n\in N, h\in H\} = G$

(ii) $\forall \tilde{n} = (n,e_H)\in\tilde{N}$ ja $g = (n_2, h)\in G$

$$g\tilde{n}g^{-1} = (n_2, h)(n, e_H)(n_2^{-1}, h^{-1}) = (n_2 n n_2^{-1}, e_H) \in \tilde{N}$$

$$\Longrightarrow \tilde{N} \triangleleft G$$

ja vastaavalla perustelulla $\tilde{H} \triangleleft G$.

(iii) $\tilde{N}\cap\tilde{H} = (N\times\{e_H\})\cap(\{e_N\}\times H) = \{(e_N, e_H)\} = \{e_G\}$

(2) Edellä N ja H eivät ole ryhmän G aliryhmiä, mutta ovat isomorfisia aliryhmiin $\tilde{N}$ ja $\hat{H}$

Ti 16.1

2

Puolisuorasta tulosta on myös abstraktimpi "ulkoinen" versio, missä N ja H ovat vain isomorfisia aliryhmiin $\tilde{N} \triangleleft G$ ja $\tilde{H} < G$.

Tällöin vaaditaan kuitenkin jotain lisäinformaatiota siitä, miten ryhmän H ja N alkioita kerrotaan keskenään. (tarkkaan ottaen vaaditaan toiminto $H \curvearrowright N$)

Lauseen 2.20 todistus

Isomorfismi $\mathbb{K}^* \simeq GL(1, \mathbb{K})$ on vain alkioiden samaistus 1x1-matriisien kanssa. Yhdistäen tämä Lauseen 2.18 upotukseen

$$GL(1, \mathbb{K}) \hookrightarrow GL(n, \mathbb{K})$$

saadaan puolisuoran tulon molemmista ryhmistä "rehellisesti" ison ryhmän osajoukkoja.

(i) $$A \in GL(n, \mathbb{K}) \Longrightarrow A = \underbrace{A \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{\det A} & & 0 \\ & 1 & \\ 0 & & \ddots & \\ & & & 1 \end{bmatrix}}_{\in SL(n, \mathbb{K})} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} \det A & & 0 \\ & 1 & \\ 0 & & \ddots & \\ & & & 1 \end{bmatrix}}_{\in GL(1, \mathbb{K})}$$

(ii) $SL(n, \mathbb{K}) \triangleleft GL(n, \mathbb{K})$ Seurauksen 2.11 mukaan

(iii) Olk. $A \in SL(n, \mathbb{K}) \cap GL(1, \mathbb{K})$. Tällöin

$$A = \begin{bmatrix} a & & 0 \\ & 1 & \\ 0 & & \ddots & \\ & & & 1 \end{bmatrix} \text{ ja } \det A = 1 \Rightarrow a = 1 \Rightarrow A = I$$

$\square$

Lauseen 2.20 nojalla, topologisesti

$$GL(n, \mathbb{R}) \simeq SL(n, \mathbb{R}) \times (\mathbb{R} \setminus \{0\}) \text{ ja}$$
$$GL(n, \mathbb{C}) \simeq SL(n, \mathbb{C}) \times (\mathbb{C} \setminus \{0\})$$

Tämän takia esim aiemmin mainittu yhtenäisyystarkastelu voidaan rajoittaa ryhmään $SL(n, \mathbb{K})$.

3. (Kompleksiset) sisätuloavaruudet

Määr 3.1

Vektoriavaruuden $\mathbb{K}^n$ sisätulo on kuvaus $\cdot : \mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}$ jolla on seuraavat ominaisuudet:

(i) konjugaattisymmetria:

$\forall x, y \in \mathbb{K}^n \quad x \cdot y = \overline{y \cdot x}$ (kompleksikonjugaatti $\mathbb{C} \to \mathbb{C} : \overline{(a+bi)} = a - bi$)

(ii) Lineaarisuus 2. argumentissa

$\forall a \in \mathbb{K} \ \forall x, y, z \in \mathbb{K}^n : \quad x \cdot (ay) = a(x \cdot y)$ ja

$x \cdot (y+z) = x \cdot y + x \cdot z$

(iii) Positiivisuus:

$\forall x \in \mathbb{K}^n : \quad x \cdot x \geq 0$ (huom $x \cdot x \in \mathbb{R}$ (i) nojalla, joten $x \cdot x \geq 0$ on järkevä ehto)

(iv) Definiittisyys:

$\forall x \in \mathbb{K}^n : \quad x \cdot x = 0 \iff x = 0$

Huom

Sisätulo on lineaarinen 1. argumentissa vain tapauksessa $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Kun $\mathbb{K} = \mathbb{C}$,

$$(x+y) \cdot z = \overline{z \cdot (x+y)} = \overline{z \cdot x} + \overline{z \cdot y} = x \cdot z + y \cdot z, \text{ mutta}$$

$$(ax) \cdot z = \overline{z \cdot (ax)} = \overline{a(z \cdot x)} = \bar{a}(x \cdot z)$$

ja $\bar{a} = a \iff a \in \mathbb{R}$

Määr 3.2

Merkitään A^T matriisin A transpoosia ja A^* konjugaattitranspoosia

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \cdots & & \cdots \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} a_{11} & \\ \vdots & \\ a_{1m} & \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \cdots & & \cdots \end{bmatrix}^* = \begin{bmatrix} \overline{a_{11}} & \\ \vdots & \\ \overline{a_{1m}} & \end{bmatrix}$$

Matriisi A jolle $A^T = A$ on symmetrinen ja matriisi jolle $A^* = A$ on hermiittinen

Reaalisille matriiseille $A \in GL(n, \mathbb{R})$ $A^T = A^*$.

Konjugaattitransposin ominaisuuksia

Lause 3.3

(i) $A \mapsto A^*$ on jatkuva

(ii) $(A^*)^* = A \quad \forall A \in M_n(\mathbb{K})$

(iii) $(tA)^* = \bar{t} A^* \quad \forall t \in \mathbb{K},\ A \in M_n(\mathbb{K})$

(iv) $(AB)^* = B^* A^* \quad \forall A, B \in M_n(\mathbb{K})$

(v) $\overline{\det A} = \det A^* \quad \forall A \in M_n(\mathbb{K})$

(vi) $\overline{\operatorname{tr} A} = \operatorname{tr} A^* \quad \forall A \in M_n(\mathbb{K})$ (matriisin $A = [a_{rs}]_{rs}$ jälki on $\operatorname{tr} A = \sum_{k=1}^{n} a_{kk}$)

Tod

(i) Komponenttikuvausten jatkuvuuden tarkastelussa transpoosi ei näe lainkaan ja kompleksikonjugaatti on jatkuva.

(ii) $(A^*)^* = ([a_{rs}]_{rs}{}^*)^* = ([\overline{a_{sr}}]_{rs})^* = [\overline{\overline{a_{rs}}}]_{rs} = [a_{rs}]_{rs} = A$

(iii) $(tA)^* = [t a_{rs}]_{rs}^* = [\bar{t}\, \overline{a_{sr}}]_{rs} = \bar{t}\, [\overline{a_{sr}}]_{rs} = \bar{t} A^*$

(iv) $(AB)^* = [\sum_k a_{rk} b_{ks}]_{rs}^* = [\sum_k \overline{a_{sk}}\, \overline{b_{kr}}]_{rs}$

$B^* A^* = [\overline{b_{sr}}]_{rs} [\overline{a_{sr}}]_{rs} = [\sum_k \overline{b_{kr}}\, \overline{a_{sk}}]$

(v) $\det A^* = \det [\overline{a_{sr}}]_{rs} = \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^{\sigma} \prod_{k=1}^{n} \overline{a_{\sigma(k),k}}$

$= \overline{\left(\sum_{\sigma \in S_n} (-1)^{\sigma} \prod_{k=1}^{n} a_{\sigma(k),k} \right)} = \overline{\left(\sum_{\sigma \in S_n} (-1)^{\sigma} \prod_{k=1}^{n} a_{k,\sigma^{-1}(k)} \right)} = \overline{\left(\sum_{\sigma \in S_n} (-1)^{\sigma} \prod_{k=1}^{n} a_{k\sigma(k)} \right)}$

$= \overline{\det A}$

(vi) $\operatorname{tr} A^* = \sum_{k=1}^{n} \overline{a_{kk}} = \overline{\sum_{k=1}^{n} a_{kk}} = \overline{\operatorname{tr} A}$ $\square$

Lemma 3.4 / Määr 3.4

Olk $x, y \in \mathbb{K}^n$. Samaistaen jälleen vektorit matriiseiksi $M_{n \times 1}(\mathbb{K})$,

$$x \cdot y = x^* y = [\overline{x_1} \ \dots \ \overline{x_n}] \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

antaa $\mathbb{K}^n$:n standardin sisätulon

Tod

Tarkistetaan, että x^*y määrittelee sisätulon.

(i) $x^*y = \overline{\sum_{k=1} \overline{x_k} y_k} = \overline{\sum_{k=1}^n x_k \overline{y_k}} = \overline{y^*x}$

(ii) $x \cdot ay = x^*(ay) = a(x^*y)$ ja

$x\cdot(y+z) = x^*(y+z) = x^*y + x^*z$

matriisitulon lineaarisuuden nojalla.

(iii) $x^*x = \sum_{k=1}^n \overline{x_k}\, x_k = \sum_{k=1}^n |x_k|^2 \geq 0$

(iv) $x^*x = 0 \iff \sum_{k=1}^n |x_k|^2 = 0 \iff x_k = 0 \ \forall k \iff x = 0$

Itse asiassa kaikki $\mathbb{K}^n$:n sisätulot ovat lähes muotoa x^*y.

Olkoon $f: \mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}$ sisätulo. Määritellään matriisi

$$A = [f(e_r, e_s)]_{rs} \in M_n(\mathbb{K})$$

Lineaarisuusehdon (ii) nojalla

$$f(x,y) = f\Big(\sum_{j=1}^n x_j e_j, \sum_{k=1}^n y_k e_k\Big) = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \overline{x_j}\, f(e_j, e_k)\, y_k$$

$$= \sum_{j=1}^n \overline{x_j} \sum_{k=1}^n f(e_j, e_k) y_k = x^*Ay$$

Ehdot (i), (iii) ja (iv) kertovat matriisin A ominaisuuksista.

(i) $\Rightarrow f(x,y) = \overline{f(y,x)} \Rightarrow x^*Ay = (y^*Ax)^* = x^*A^*y \quad \forall x, y \in \mathbb{K}^n$

Huomaa, että kantavektoreille $e_r^* B e_s = B_{rs} \quad \forall B \in M_n(\mathbb{K})$,

joten $e_r^* A e_s = e_r^* A^* e_s \Rightarrow A_{rs} = (A^*)_{rs} \Rightarrow A = A^*$

eli A on hermiittinen.

(iii) & (iv) $\Rightarrow \quad x^*Ax = f(x,x) > 0 \quad \forall x \neq 0 \Rightarrow A$ on positiividefiniitti

Sisätuloavaruuden symmetriat

Standardille sisätulolle $\forall A \in M_n(\mathbb{K})$ ja $x, y \in \mathbb{K}^n$

$$Ax \cdot Ay = (Ax)^* Ay = x^* A^* A y = x \cdot (A^* A y)$$

Määr 3.5

Unitaariryhmä on $U(n) = \{A \in GL(n, \mathbb{C}) : A^* A = I\}$ ja ortogonaaliryhmä on $O(n) = \{A \in GL(n, \mathbb{R}) : A^T A = I\}$

Lause 3.6

$O(n)$ ja $U(n)$ ovat matriisiryhmiä

Tod

Käsitellään Unitaariryhmää. Ortogonaaliryhmälle todistus on lähes identtinen.

$U(n) < GL(n, \mathbb{C})$:

(i) $I \in U(n)$: $\quad I^* I = I I = I$

(ii) $A \in U(n) \Rightarrow A^{-1} \in U(n)$: Käänteismatriisin yksikäsitteisyyden nojalla jos $A \in U(n)$, $A^{-1} = A^*$, joten $(A^{-1})^* A^{-1} = (A^*)^* A^* = AA^* = I$

(iii) $A, B \in U(n) \Rightarrow AB \in U(n)$:

$$(AB)^* AB = B^* A^* AB = B^* B = I$$

$U(n)$ on suljettu:

Tämä seuraa operaation $f: GL(n, \mathbb{C}) \to GL(n, \mathbb{C})$, $f(A) = A^* A$ jatkuvuudesta. Nimittäin $U(n) = f^{-1}(\{I\})$. $\square$

Ortogonaali ja unitaariryhmät ovat reaalisten ja kompleksisten sisätuloavaruuksien symmetriaryhmät:

TI 16.1

7

Lause 3.7

Olkoon $A \in GL(n, \mathbb{K})$. Seuraavat ovat ekvivalentteja

(i) $A \in \begin{cases} O(n) & \text{jos } \mathbb{K} = \mathbb{R} \\ U(n) & \text{jos } \mathbb{K} = \mathbb{C} \end{cases}$

(ii) $\forall x, y \in \mathbb{K}^n: \quad Ax \cdot Ay = x \cdot y$

(iii) $\forall x, y \in \mathbb{K}^n: \quad \|Ax - Ay\| = \|x - y\|$

Tod

(i) $\Rightarrow$ (ii): $Ax \cdot Ay = (Ax)^* Ay = x^* A^* A y \overset{A^*A = I}{=} x^* y = x \cdot y$

(ii) $\Rightarrow$ (iii): $\|Ax - Ay\|^2 = \|A(x-y)\|^2 = A(x-y) \cdot A(x-y) = (x-y) \cdot (x-y) = \|x-y\|^2$

(iii) $\Rightarrow$ (i): $\forall x \in \mathbb{K}^n: \quad x^* A^* A x = \|Ax\|^2 = \|x\|^2 = x^* x$

Soveltamalla tätä huomataan vertaamalla yhtälöitä

$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2 x \cdot y$ ja

$\|Ax + Ay\|^2 = \|Ax\|^2 + \|Ay\|^2 + 2 Ax \cdot Ay$

että on oltava $Ax \cdot Ay = x \cdot y$, eli $x^* A^* A y = x^* y$.

Valinnalla $x = e_r$ ja $y = e_s$,

$$e_r^* A^* A e_s = e_r^* e_s \Rightarrow (A^* A)_{rs} = \begin{cases} 1, & r = s \\ 0, & r \neq s \end{cases} \Rightarrow A^* A = I \qquad \square$$

Lause 3.8

Olkoot $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{K}^n \simeq M_{n \times 1}(\mathbb{K})$ lineaarisesti riippumattomia vektoreita ja $A = [x_1 \ldots x_n] \in GL(n, \mathbb{K})$ näistä muodostettu matriisi.

Tällöin

$$A \in \begin{cases} O(n), & \text{jos } \mathbb{K} = \mathbb{R} \\ U(n), & \text{jos } \mathbb{K} = \mathbb{C} \end{cases}$$

$\Longleftrightarrow$ vektorit $x_1, \ldots, x_n$ muodostavat ortonormaalin kannan standardin sisätulon suhteen

Tod
HT

$\|Ax - Ay\| = \|x - y\| \Rightarrow Ax \cdot Ay = x \cdot y$

$(x+iy)\cdot(x+iy) \rightsquigarrow iAx \cdot Ay + iAx \cdot Ay = ix \cdot y + ix \cdot y$

Seuraus 3.9

$O(n)$ ja $U(n)$ ovat kompakteja.

Määr 3.10

$X \subset \mathbb{K}^m$ on kompakti jos se on suljettu ja rajoitettu.

Seurauksen 3.9 todistus

Koska $O(n)$ ja $U(n)$ ovat matriisiryhmiä, ne ovat suljettuja, joten riittää osoittaa että ne ovat rajoitettuja.

Olkoon $A \in O(n)$ tai $A \in U(n)$.

Lauseen 3.8 nojalla matriisin A sarakkeet muodostavat ortonormaalin kannan, joten

$$|A_{rs}|^2 \leq \sum_{k=1}^{n} |A_{ks}|^2 = 1.$$

$\Rightarrow$ jokaisen $O(n)$:n tai $U(n)$:n matriisin jokainen alkio on normiltaan alle 1 $\Rightarrow$ $O(n)$ ja $U(n)$ ovat rajoitettuja $\square$

Lauseen 2.20 hajotelmasta saadaan vastaavat hajotelmat ortogonaali- ja unitaariryhmille:

$$GL(n,\mathbb{K}) = SL(n,\mathbb{K}) \rtimes GL(1,\mathbb{K})$$
$$O(n) = SO(n) \rtimes O(1)$$
$$U(n) = SU(n) \rtimes U(1)$$

(itse asiassa $O(n) = SO(n) \times O(1)$) upotuksella $\{\pm 1\} \hookrightarrow \{\pm I\}$ kun n pariton

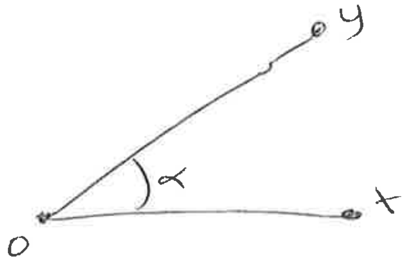
Määr 3.11

Erityinen ortogonaalinen ryhmä on $SO(n) = \{A \in O(n) : \det A = 1\}$

Erityinen unitaarinen ryhmä on $SU(n) = \{A \in U(n) : \det A = 1\}$

Kiertoryhmät SO(n)

Ortogonaaliryhmä $O(n)$ koostuu Lauseen 3.7 mukaan täsmälleeen kaikista lineaarikuvauksista $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ jotka säilyttävät sisätulon, eli säilyttävät kulmien suuruudet ja etäisyydet pisteiden välillä.



$$\cos \alpha = \frac{x \cdot y}{\|x\| \cdot \|y\|}$$

Tällaisia kuvauksia $\mathbb{R}^n$:ssä ovat vain kierrot ja peilaukset ja niiden yhdisteet.

$SO(n) \triangleleft O(n)$ sisältää kaikki kierrot. Tasossa $\mathbb{R}^2$ tämä on helppo hahmottaa.

Lause 3.12

Topologisina ryhminä $SO(2) \simeq S^1 \subset \mathbb{C}$

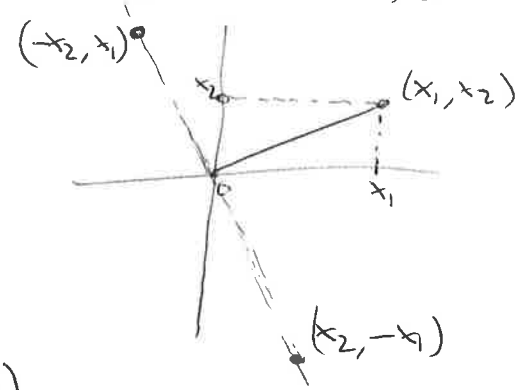
Tod

Olkoon $A \in SO(2)$ ja olkoot $x, y \in \mathbb{R}^2$ sen sarakkeet.

Lauseen 3.8 nojalla $\{x, y\} \subset \mathbb{R}^2$ on ortonormaali kanta, joten

$$y = (y_1, y_2) = (\mp x_2, \pm x_1)$$

$$A = \begin{bmatrix} x_1 & \mp x_2 \\ x_2 & \pm x_1 \end{bmatrix}$$



koska

$$1 = \det A = \pm(x_1^2 + x_2^2) = \pm 1,$$

$$A = \begin{bmatrix} x_1 & -x_2 \\ x_2 & x_1 \end{bmatrix} = \rho(x_1 + x_2 i)$$

Toisin sanoen rajoittamalla kuvaus $\rho : \mathbb{C} \to M_2(\mathbb{R})$ joukkoon

$$S^1 = \{a + bi \in \mathbb{C} : a^2 + b^2 = 1\}$$

saadaan jatkuva ryhmäisomorfismi $\rho : S^1 \to SO(2)$.

Käänteiskuvaus $\rho^{-1} : SO(2) \to S^1$ taas on rajoittuma kuvauksesta

$$M_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{C} : \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \mapsto a + bi$$

joten ρ^{-1} on jatkuva. Näin ollen ρ on topologisten ryhmien isomorfismi. $\square$

Lause 3.13 (Eulerin kiertolause)

Jokainen kierto $A \in SO(3)$ on kierto jonkin akselin suhteen.

Tod

Väite seuraa jos osoitetaan, että $Ax = x$ jollekin $x \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$, sillä tällöin lineaarisuuden perusteella A pitää x:n suuntaisen suoran paikallaan, joten sen on oltava kierto tämän akselin suhteen.

$Ax = x \Leftrightarrow x$ on ominaisvektori ominaisarvolle 1, joten riittää tarkistaa, että 1 todella on ominaisarvo.

$$
\begin{aligned}
\det(A-I) &\overset{\det A = 1}{=} \det A \cdot \det(A-I) \\
&\overset{\det B^T = \det B}{=} \det A \cdot \det(A^T - I) \\
&= \det(AA^T - A) \\
&= \det(I - A) \\
&= (-1)^3 \det(A - I) = -\det(A-I)
\end{aligned}
$$

$\Rightarrow \det(A-I) = 0 \Rightarrow 1$ on ominaisarvo $\square$

Kvaterniot

Eulerin kiertolause $\Rightarrow$ jokainen kierto sisältää informaatiota ainoastaan kiertoakselin ($x \in S^2 \subset \mathbb{R}^3$) ja kiertokulman ($\theta \in S^1$) verran.

Kolmen parametrin sijaan matriisiesityksessä $SO(3)$:lla on yhdeksän parametria ja kokoelma riippuvuuksia ehdoista $AA^T = I$ ja $\det A = 1$.

Vastaavasti tason kiertojen tapauksessa matriisiesityksessä $SO(2)$ on 4 parametria yhden (kiertokulma) sijaan.
Yhden parametrin esitys isomorfismin $S^1 \simeq SO(2)$ kautta tuli kuitenkin näppärästi kompleksilukujen avulla.

Kvaterniot (Hamilton 1843) antavat vastaavan tavan parametrisoida kierrot $\mathbb{R}^3$:issa. (ja myös $\mathbb{R}^4$:ssa)

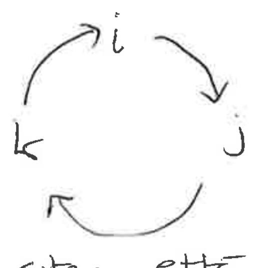
Kvaternioalgebra on reaalinen 4-ulotteinen vektoriavaruus

$$\mathbb{H} = \{a + bi + cj + dk \;:\; a,b,c,d \in \mathbb{R}\}$$

varustettuna kertolaskulla, jolle

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$$

Kertolaskua esitetään usein diagrammi~~lla~~



joka tulkitaan siten, että kahden kaarion alkion tulo on kolmas ja merkki on +, jos ensimmäisestä osoittaa nuoli toiseen, eli

$$ki = j \quad \text{tai} \quad jk = i \quad \text{tai} \quad ji = -k$$

Kvaterniot tällä kertolaskulla muodostavat ns. <u>vinokunnan</u>
(kaikki kunnan muut oletukset paitsi kertolaskun kommutatiivisuus)

Vastaavasti kuin kompleksiluvuilla on upotus $\mathbb{C} \to M_2(\mathbb{R})$, kvaternioilla on upotus $\mathbb{H} \to M_2(\mathbb{C})$.

Tämä saadaan matriiseista

$$1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad i = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad j = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix}, \quad k = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$$

Määr 3.14 (Cayley 1858)

Kvaternioalgebra on reaalinen 4-ulotteinen avaruus

$$\mathbb{H} = \operatorname{span}_{\mathbb{R}}(1, i, j, k) = \left\{ \begin{bmatrix} a+id & -b-ic \\ b-ic & a-id \end{bmatrix} : a,b,c,d \in \mathbb{R} \right\} \subset M_2(\mathbb{C})$$

varustettuna matriisien kertolaskulla.

Tarkistetaan, että kertolasku on mielekäs.

Merkitään $x = a+id$ ja $y = b-ic$, jolloin

$$\begin{pmatrix} a+id & -b-ic \\ b-ic & a-id \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & -\bar{y} \\ y & \bar{x} \end{pmatrix}$$

Kahden tällaisen alkion tulo on

$$\begin{pmatrix} x & -\bar{y} \\ y & \bar{x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z & -\bar{w} \\ w & \bar{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xz - \bar{y}w & -x\bar{w} - \bar{y}\bar{z} \\ yz + \bar{x}w & -y\bar{w} + \bar{x}\bar{z} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} xz - \bar{y}w & -\overline{(yz + \bar{x}w)} \\ yz + \bar{x}w & \overline{xz - \bar{y}w} \end{pmatrix}$$

joka on edelleen samaa muotoa.

Määr 3.15

Kvaternion $q = a+bi+cj+dk$ reaaliosa on $\mathrm{Re}(q) = a$ ja imaginääriosa on $\mathrm{im}(q) = bi+cj+dk$.

Kvaternio jolle $\mathrm{im}(q) = 0$ on reaalinen ja kvaternio jolle $\mathrm{re}(q) = 0$ on imaginäärinen.

Kvaterniokonjugaatti on $\bar{q} = \mathrm{re}(q) - \mathrm{im}(q)$

Imaginääristen kvaternioiden joukkoa tullaan merkitsemään $\mathbb{R}i + \mathbb{R}j + \mathbb{R}k$

Kvaternioille käytetään $\mathbb{R}^4$:ista periytyvää normia

$$|a+bi+cj+dk| = \sqrt{a^2+b^2+c^2+d^2}$$

TO 18.1

6

Tämä voidaan esittää matriisiesityksen kautta

$$|q|^2 = \det q = \det\begin{pmatrix} a+di & -b-ci \\ b-ci & a-di \end{pmatrix}$$

tai kvaterniokonjugaatin kautta

$$|q|^2 = q\cdot\bar{q}.$$

Hyödyllisiä perusominaisuuksia:

(1) $\forall r\in\mathbb{R}\subset\mathbb{H}$ ja $q\in\mathbb{H}$ $\quad qr=rq$

(2) $\forall q\in\mathbb{H}\setminus\{0\}:\quad q^{-1}=\dfrac{\bar{q}}{|q|^2}.$

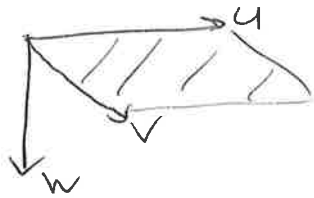
Imaginääristen kvaternioiden tulo voidaan kirjoittaa $\mathbb{R}^3$:n sisätulon ja ristitulon avulla.

Määr 3.16

Ristitulo $\mathbb{R}^3 \simeq \mathbb{R}i + \mathbb{R}j + \mathbb{R}k$ issa on muodollinen determinantti

$$u \times v = \det\begin{pmatrix} i & j & k \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{pmatrix} = (u_2v_3 - u_3v_2)i + (u_3v_1 - u_1v_3)j + (u_1v_2 - u_2v_1)k$$

Geometrisesti ristitulo antaa orientoidulle tasolle (u, v) kohtisuoran vektorin $w = u \times v$, jolle $\|w\|$ on vektorien u ja v määräämän suunnikkaan pinta-ala. Erityisesti $u \times v = -v \times u$.



Lemma 3.17

Kaikille $u, v \in \mathbb{R}i + \mathbb{R}j + \mathbb{R}k$, kvaterniotulo on

$$uv = -u \cdot v + u \times v$$

Tod

Lasku. HT.

Huom

Imaginäärisille $u, v \in \mathbb{H}$

(1) $uv \in \mathbb{R}i + \mathbb{R}j + \mathbb{R}k \iff u \cdot v = 0$ eli u ja v ovat ortogonaaliset

(2) $uv \in \mathbb{R} \iff u \times v = 0$ eli u ja v ovat lineaarisesti riippuvia

(3) Jos $u \cdot v = 0$, niin $uv = u \times v = -v \times u = -vu$.

(4) Kvaternioalgebrassa -1:llä on äärettömästi neliöjuuria!
$\forall u \in \mathbb{R}i + \mathbb{R}j + \mathbb{R}k$ joille $|u| = 1$, $u^2 = -u \cdot u + u \times u = -|u|^2 = -1$.

Kvaterniot ja kierrot

TO 18.1
8

Yksikkökvaternio $q \in \mathbb{H}$ voidaan aina kirjoittaa muodossa

$$q = \cos\theta + u\sin\theta,$$

missä $\theta \in \mathbb{R}$ ja $u \in \mathbb{R}i + \mathbb{R}j + \mathbb{R}k$ on yksikkökvaternio. Tässä siis

$$\begin{cases} \cos\theta = \mathrm{Re}(q) \\ \sin\theta = |\mathrm{Im}(q)| \end{cases} \quad \text{ja} \quad u = \frac{\mathrm{Im}(q)}{|\mathrm{Im}(q)|}$$

Tarkastellaan yksikkökvaternion q määräämää konjugaatiokuvausta

$$A_q : \mathbb{H} \to \mathbb{H} \qquad A_q(x) = qxq^{-1}.$$

Reaalisten kvaternioiden kommutatiivisuuden nojalla $A_q(r) = r \ \forall r \in \mathbb{R}$.

Toisaalta, koska

$$|A_q(x)| = |qxq^{-1}| = |q| \cdot |x| \cdot |q^{-1}| = |q| \cdot |x| \cdot \frac{|\bar{q}|}{|q|^2} = |x|,$$

kuvaus A_q on Lauseen 3.7 nojalla ortogonaalinen, eli $A_q \in O(4)$.

Näin ollen A_q kuvaa $\mathbb{R}$:n ortogonaalikomplementin

$$A_q(\mathbb{R}^\perp) = A_q(\mathbb{R})^\perp, \text{ eli } \quad A_q(\mathbb{R}i + \mathbb{R}j + \mathbb{R}k) = \mathbb{R}i + \mathbb{R}j + \mathbb{R}k.$$

Rajoittamalla imaginäärisiin kvaternioihin saadaan haluttu kuvaus

$$R_q : \mathbb{R}i + \mathbb{R}j + \mathbb{R}k \to \mathbb{R}i + \mathbb{R}j + \mathbb{R}k, \quad R_q(x) = qxq^{-1}$$

Lause 3.18

Olkoon $q = \cos\theta + u\sin\theta \in \mathbb{H}$, $|u| = 1$.

Tällöin $R_q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ on kulman 2θ kierto akselin u suhteen.

TO 18.11

9

Olkoon $v \in \mathbb{R}i+\mathbb{R}j+\mathbb{R}k$, $|v|=1$, $u\cdot v=0$ ja $w=u\times v$, jolloin $\{u,v,w\}$ on avaruuden $\mathbb{R}i+\mathbb{R}j+\mathbb{R}k$ ortonormaali kanta.

Lemman 3.17 nojalla w on kvaternitulona $w=uv$.

Tarkastellaan kuvausta R_q kannassa $\{u,v,w\}$.

Kvaternion $q=\cos\theta+u\sin\theta$ käänteisalkio on $q^{-1}=\cos\theta-u\sin\theta$, joten $\forall x\in\mathbb{R}i+\mathbb{R}j+\mathbb{R}k$

$$\begin{aligned}R_q(x)&=(\cos\theta+u\sin\theta)x(\cos\theta-u\sin\theta)\\&=(x\cos\theta+ux\sin\theta)(\cos\theta-u\sin\theta)\\&=x\cos^2\theta-xu\sin\theta\cos\theta+ux\sin\theta\cos\theta-uxu\sin^2\theta\end{aligned}$$

Tapauksessa $x=u$, $-xu=-u^2=1$, $ux=u^2=-1$, $-uxu=-u^3=u$, eli

$$R_q(u)=u(\cos^2\theta+\sin^2\theta)=u,$$

eli R_q pitää u-akselin paikallaan.

Tapauksessa $x=v$, $-xu=-vu\underset{\substack{\uparrow\\ u\cdot v=0}}{=}uv=w$, $ux=uv=w$, $-uxu=-uvu\underset{\substack{\uparrow\\ u\cdot v=0}}{=}vu^2=-v$, eli

$$\begin{aligned}R_q(v)&=v(\cos^2\theta-\sin^2\theta)+2w\sin\theta\cos\theta\\&=v\cos 2\theta+w\sin 2\theta\end{aligned}$$

Tapauksessa $x=w$, $-xu=-wu=-uvu=-v$,
$ux=uw=uuv=-v$,
$-uxu=-uwu=-uuvu=vu=-uv=-w$, eli

$$\begin{aligned}R_q(w)&=w(\cos^2\theta-\sin^2\theta)-2v\sin\theta\cos\theta\\&=v(-\sin 2\theta)+w\cos 2\theta\end{aligned}$$

Siis

$$R_q(au+bv+cw)=au+(b\cos 2\theta-c\sin 2\theta)v+(b\sin 2\theta+c\cos 2\theta)w$$

eli kuvausta R_q vastaa tässä kannassa matriisitulo

$$\begin{bmatrix}a\\b\\c\end{bmatrix}\longmapsto\begin{bmatrix}1&0&0\\0&\cos 2\theta&-\sin 2\theta\\0&\sin 2\theta&\cos 2\theta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a\\b\\c\end{bmatrix},$$

joka on (v,w)-tason eli u-akselin suhteen kulman 2θ kierto $\square$

Lause 3.19

Yksikkökvaternioiden topologinen ryhmä ja $SU(2)$ ovat isomorfiset.

(Itse asiassa tällä kurssilla käytetyllä kvaternioiden määritelmällä
$\{q \in \mathbb{H} : |q| = 1\} = SU(2)$)

Tod

Kvaterniotulon mielekkyyttä tarkastaessa käytettiin kompleksista kirjoitusasua

$$q = \begin{bmatrix} a+id & -b-ic \\ b-ic & a-id \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & -\bar{y} \\ y & \bar{x} \end{bmatrix},$$

missä $a,b,c,d \in \mathbb{R}$ korvataan kompleksisilla $x, y \in \mathbb{C}$.

Käytetään Lauseen 3.8 karakterisaatiota

$q \in SU(2) \iff$ sarakkeet $(x,y) \in \mathbb{C}^2$ ja $(-\bar{y}, \bar{x}) \in \mathbb{C}^2$ ovat ortonormaalit. ja $\det q = 1$.

Sarakkeet ovat aina ortonormaalit: $\forall x, y \in \mathbb{C}$

$$(x,y) \cdot (-\bar{y}, \bar{x}) = [\bar{x}\ \bar{y}] \begin{bmatrix} -\bar{y} \\ \bar{x} \end{bmatrix} = -\bar{x}\bar{y} + \bar{y}\bar{x} = 0$$

Lisäksi

$$\|(x,y)\|^2 = |x|^2 + |y|^2 \quad \text{ja}$$

$$\|(-\bar{y}, \bar{x})\|^2 = |-\bar{y}|^2 + |\bar{x}|^2 = |x|^2 + |y|^2 \quad \text{ja}$$

$$|q| = x\bar{x} + y\bar{y} = |x|^2 + |y|^2,$$

joten, sarakkeet ovat yksikkönormisia $\iff |q| = 1$ $\square$

koska $\det q = |q|^2$, saadaan lauseen väite.

Lause 3.20

kuvaus $R: SU(2) \to SO(3)$, $R(q) = R_q$
on jatkuva surjektiivinen homomorfismi, ja
$$R(q_1) = R(q_2) \implies q_1 = \pm q_2 .$$

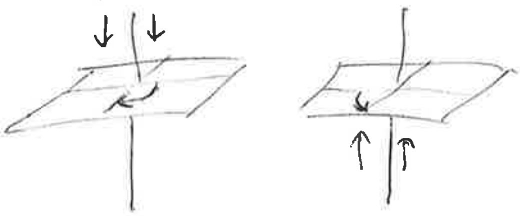
Tod

Jatkuvuus: Olkoon $q_k \to q$ suppeneva jono ~~yksikkö~~ kvaternioita (eli $SU(2)$:n alkioita). Tällöin kaikille $x \in \mathbb{R}^3 \cong \mathbb{R}i + \mathbb{R}j + \mathbb{R}k$
$$R_{q_k}(x) = q_k x q_k^{-1} \longrightarrow q x q^{-1} = R_q(x)$$
matriisitulon ja käänteiskuvauksen jatkuvuuden nojalla.
Näin ollen $R_{q_k} \to R_q$.

Surjektiivisuus: Eulerin kiertolauseen nojalla jokainen $A \in SO(3)$ on jonkin kulman θ kierto jonkin akselin u suhteen, ja kvaternio $\cos\frac{\theta}{2} + u \sin\frac{\theta}{2} \in SU(2)$ antaa tällaisen kierron.

Homomorfismi: konjugaatiokuvaus on homomorfismi: $\forall x \in \mathbb{R}^3$
$$R_{q_1} \circ R_{q_2}(x) = R_{q_1}(q_2 x q_2^{-1}) = q_1 q_2 x q_2^{-1} q_1^{-1} = (q_1 q_2) x (q_1 q_2)^{-1} = R_{q_1 q_2}(x)$$

$R(q_1) = R(q_2) \Rightarrow q_1 = \pm q_2$:
Jos $R(q_1) = R(q_2)$, kierroilla on sama akseli. Esityksessä
$$q_1 = \cos\theta_1 + u_1 \sin\theta_1 , \qquad q_2 = \cos\theta_2 + u_2 \sin\theta_2$$
(joka on yksikäsitteinen) akselin määrää $\mathrm{span}_{\mathbb{R}}(u)$, joten koska $|u_1| = 1 = |u_2|$, on oltava $u_1 = \pm u_2$.
Tapauksessa $u_1 = -u_2$, ehto $R(q_1) = R(q_2)$ tarkoittaa että $\theta_1 = \pi - \theta_2$
(ylhäältä päin katsottuna myötäpäivään kierto on alhaalta katsottuna vastapäivään kierto)



Toisin sanoen, joko $q_1 = q_2$ tai
$$q_1 = \cos(\pi - \theta_2) - u_2 \sin(\pi - \theta_2) =$$
$$= -\cos\theta_2 - u_2 \sin\theta_2 = -q_2$$

Lause 3.20 voidaan tulkita myös väittämänä

$$SO(3) \simeq SU(2)/\{\pm I\}$$

($SU(2)$ on $SO(3)$:n kaksinkertainen peite)

TI 23.1
3

Kiertoryhmien yhtenäisyys

Määr 3.21

Joukko $X \subset \mathbb{K}^n$ on <u>polkuyhtenäinen</u> jos $\forall x, y \in X$ on olemassa polku $\gamma : [0,1] \to X$ jolle $\gamma(0) = x$, $\gamma(1) = y$. Tällaista polkua merkitään myös $x \rightsquigarrow y$.

Lause 3.22

$SO(n)$ on polkuyhtenäinen

Tod

Todistetaan väite induktiolla dimension n yli. Tapauksessa $n=1$ $SO(1) = \{I\}$ ei ole mitään tehtävää. Tapaus $n=2$ seuraa Lauseesta 3.12: $SO(2) \simeq S^1$ ja ympyrä S^1 on polkuyhtenäinen.
Oletetaan, että $SO(n-1)$ tunnetaan polkuyhtenäiseksi ja osoitetaan sama $SO(n)$:lle.

Olkoon $A \in SO(n)$. Kiinnitetään mielivaltainen $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ (esim $x = e_1$). Oletetaan ensin että $Ax = x$. Tällöin demo 2.7 nojalla $A \in \mathrm{stab}(x) \simeq SO(n-1)$, jolloin induktio-oletuksen nojalla on olemassa polku I:stä A:han.

Jos taas $Ax \neq x$, voidaan määritellä tason (x, Ax) kierto B jolle $Ax \mapsto x$, eli jolle $BAx = x$. Tällöin edellinen argumentti antaa polun $I \rightsquigarrow BA$ $SO(n)$:ssä.
Toisaalta tason (x, Ax) kierrot määrittävät aliryhmän $H < SO(n)$, $H \simeq SO(2)$ joten on olemassa polku $\gamma : I \rightsquigarrow B$ H:ssa, eli $\gamma : [0,1] \to H$, $\gamma(0) = I$, $\gamma(1) = B$.
Tällöin $B(t) = \gamma(t)A$ on polku $A \rightsquigarrow BA$ $SO(n)$:ssä. $\square$

Lause 3.23

$SU(n)$ on polkuyhtenäinen

Tod

HT. Argumentti on vastaava kuin Lauseessa 3.22.

Seuraus 3.24

$U(n)$ ja $GL(n,\mathbb{C})$ ovat polkuyhtenäisiä.

Tod

$U(n)$:n polkuyhtenäisyys seuraa hajotelmasta $U(n) = SU(n) \rtimes U(1) \cong SU(n) \rtimes (S^1)$

Näin ollen riittää osoittaa että jokainen $A \in GL(n,\mathbb{C})$ voidaan yhdistää polulla $GL(n,\mathbb{C})$:ssä johonkin $B \in U(n)$.
Tämä voidaan osoittaa suorittamalla 'ortonormalisaatio polkuja pitkin'.

Olkoot $x_1, \ldots, x_n$ matriisin $A \in GL(n,\mathbb{C})$ sarakkeet, jolloin $x_1, \ldots, x_n$ on $\mathbb{C}^n$:n kanta. Kannan ortonormalisaatiossa on kaksi operaatiota

(1) Normalisointi: $x \mapsto \dfrac{x}{\|x\|}$ ja

(2) Ortogonalisointi: $x \mapsto x - (y \cdot x)\, y$
(y:n suhteen)

Näiden jatkuvat versiot saadaan poluilla

$$\alpha_x : [0,1] \to \mathbb{C}^n \qquad \alpha_x(t) = \frac{x}{1 + (\|x\| - 1)\, t} \quad \text{ja}$$

$$\beta_{xy} : [0,1] \to \mathbb{C}^n \qquad \beta_{xy}(t) = x - t\,(y \cdot x)\, y$$

Näille poluille

$$\alpha_x(0) = \frac{x}{1} = x, \qquad \alpha_x(1) = \frac{x}{1 + (\|x\| - 1)} = \frac{x}{\|x\|}$$

$$\beta_{xy}(0) = x \qquad \beta_{xy}(1) = x - (y \cdot x)\, y$$

TI 23.1

5

Polku matriisista $A=[x_1 \;\cdots\; x_n]$ ortonormalisoituun matriisiin $B=[\hat{x}_1 \;\hat{x}_2 \;\cdots\; \hat{x}_n]\in U(n)$ saadaan käyttämällä edeltäviä polkuja sarakkeissa.

Esim ensimmäisen sarakkeen normalisointi:

$$\gamma_1:[0,1]\to GL(n,\mathbb{C}) \qquad \gamma_1(t)=[\alpha_x(t)\; x_2 \;\cdots\; x_n]$$

Tälle $\gamma_1(0)=A$ ja $\gamma_1(1)=[\hat{x}_1\; x_2 \cdots x_n]$, $\hat{x}_1=\frac{x_1}{\|x_1\|}$ ja $\gamma_1(t)\in GL(n,\mathbb{C})$ sillä determinantin multilineaarisuuden nojalla

$$\det\left[\frac{x_1}{1+t(\|x_1\|-1)}\; x_2 \;\cdots\; x_n\right]=\frac{1}{1+t(\|x\|-1)}\det[x_1\; x_2 \cdots x_n].$$

Vastaavasti koska

$$\det[\hat{x}_1\;\; x_2-t(\hat{x}_1\cdot x_2)\hat{x}_1\;\; x_3 \cdots x_n]$$

$$=\det[\hat{x}_1\;\; x_2\;\; x_3 \cdots x_n],$$

$$\gamma_2:[0,1]\to GL(n,\mathbb{C}) \quad \gamma_2(t)=[\hat{x}_1\;\; x_2-t(\hat{x}_1\cdot x_2)\hat{x}_1\;\; x_3 \cdots x_n]$$

on hyvin määritelty polku jolle

$$\gamma_2(0)=[\hat{x}_1\;\; x_2 \cdots x_n] \quad \text{ja} \quad \gamma_2(1)=[\hat{x}_1,\; x_2-(\hat{x}_1\cdot x_2)\hat{x}_1\;\; x_3 \cdots x_n]$$

el. $\gamma_2(1)$:ssä ensimmäiset kaksi saraketta ovat ortogonaaliset.

Näin jatkamalla saadaan polku $A\sim B$. □

Yleistetyistä ortogonaaliryhmistä

Erilaisia sisätulon yleistyksiä vastaa usein jokin ortogonaaliryhmän yleistys joka koostuu lineaarikuvauksista jotka säilyttävät tämän sisätulon.

symplektiset ryhmät $Sp(n)$:

$\mathbb{R}^n$ symmetrinen sisätulo

$\mathbb{C}^n$ hermiittinen sisätulo

$\mathbb{H}^n$ kvaternio-sisätulo $(q_1,\dots,q_n)\cdot(p_1,\dots,p_n)=\sum_{j=1}^n \overline{q_j}\,p_j$

$O(n)=\{A : A^TA=I\}$ $\quad U(n)=\{A\in GL(n,\mathbb{C}) : A^*A=I\}$ $\quad Sp(n)=\{A\in GL(n,\mathbb{H}) : A^*A=I\}$

Kvaternioista koostuvia matriisiavaruuksia $M_n(\mathbb{H})$ ja ryhmiä $GL(n,\mathbb{H})$ ei tulla varsinaisesti käsittelemään.

Monet matriisiryhmien ja -avaruuksien todistukset toimivat sellaisinaan, toisissa taas joudutaan olemaan tarkkana. Ongelmia aiheuttaa kvaternioiden kommutatiivisuuden puuttuminen, jolloin esim $M_n(\mathbb{H})$ ei ole vektoriavaruus $\mathbb{H}$:n suhteen (vektoriavaruus vaatii kunnan) ja esim determinantin määrittely aiheuttaa vaikeuksia.

Yleistetyt ortogonaaliryhmät $O(p,q)$

Joustamalla positiividefiniittiydestä $x\cdot x\geq 0$ voidaan määritellä (p,q)-sisätulo

$$\mathbb{R}^{p+q}\times\mathbb{R}^{p+q}\to\mathbb{R}$$

$$(x_1,\dots,x_p,x_1',\dots,x_q')\cdot(y_1,\dots,y_p,y_1',\dots,y_q') = x_1y_1+\dots+x_py_p - x_1'y_1' - \dots - x_q'y_q'$$

eli sisätulo epädefiniitin matriisin $Q=\mathrm{diag}(\underbrace{1,\dots,1}_{p\text{ kpl}},\underbrace{-1,\dots,-1}_{q\text{ kpl}})$ avulla

$$x\cdot y = x^TQy.$$

Tämän sisätulon säilyttävät lineaarikuvaukset (p,q)-ortogonaaliryhmässä

$$O(p,q)=\{A\in GL(p+q,\mathbb{R}) : A^TQA=Q\}$$

Esim aika-avaruuden symmetrioita mallintaa Lorentzin ryhmä $O(3,1)$ (tai $O(1,3)$ merkkikonventiosta riippuen)

II Matriisieksponentiaali

4. Eksponentiaali ja logaritmi

Eksponenttifunktio $e^{\cdot}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ja logaritmi $\log: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ yleistetään matriiseille sarjakehitelmiensä kautta. Tässä täytyy kuitenkin olla varovainen sarjojen suppenemisen kanssa. Täsmennetään tämän takia kurssilla käytettävän matriisinormin käsitettä ja ominaisuuksia.

Määr 4.1 Matriisien operaattorinormi on normi

$$\|\cdot\|: \mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{K}) \to \mathbb{R} \qquad \|A\| = \sup_{x\in\mathbb{K}^m\setminus\{0\}} \frac{\|Ax\|_{\mathbb{K}^n}}{\|x\|_{\mathbb{K}^m}} = \sup_{\substack{x\in\mathbb{K}^n\\ \|x\|_{\mathbb{K}^n}=1}} \|Ax\|_{\mathbb{K}^n}$$

Lause 4.2

(i) $\|tA\| = |t|\cdot\|A\| \quad \forall t\in\mathbb{K}$ ja $A\in\mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{K})$

(ii) $\|A+B\| \le \|A\|+\|B\| \quad \forall A\in\mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{K})$ ja $B\in\mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{K})$

(iii) $\|AB\| \le \|A\|\cdot\|B\| \quad \forall A\in\mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{K})$ ja $B\in\mathcal{M}_{m\times p}(\mathbb{K})$

(iv) $\|A_k - A\| \to 0 \iff A_k \to A$ komponenteittain

Tod

HT

TO 25.1

2

Reaalisella eksponenttifunktiolla on (0:ssa) sarjakehitelmä

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

joka suppenee kaikilla $x \in \mathbb{R}$ itseisesti.

Logaritmilla taas on (1:ssä) sarjakehitelmä

$$\log(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} (x-1)^k$$

joka suppenee itseisesti kun $|x-1|<1$.

Tarkastellaan vastaavia sarjoja matriiseille $A \in M_n(\mathbb{K})$.

Lemma 4.3

(i) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}$ suppenee $\forall A \in M_n(\mathbb{K})$

(ii) $$\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(tA)^k}{k!}\right) \cdot \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(sA)^k}{k!}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{((t+s)A)^k}{k!}$$

(iii) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} = \hat{A}$ on kääntyvä ja $\displaystyle(\hat{A})^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-A)^k}{k!}$

Tod

(i) Sarja $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}$ suppenee jos se suppenee itseisesti, eli $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \left\| \frac{A^k}{k!} \right\|$ suppenee.

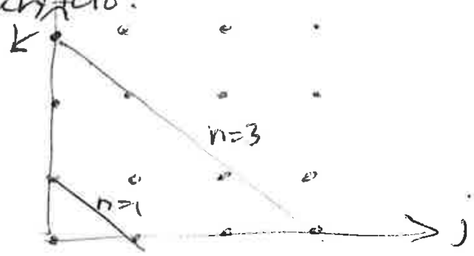
Matriisinormin ominaisuuksien nojalla

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left\| \frac{A^k}{k!} \right\| \le \sum_{k=0}^{\infty} \left| \frac{1}{k!} \right| \|A^k\| \le \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \|A\|^k = e^{\|A\|}$$

joten sarjan suppeneminen seuraa reaalien eksponenttifunktion sarjakehitelmän suppenemisesta.

(ii) Itseisesti suppenevien sarjojen tulon antaa Cauchy-tulo:

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} B_k\right)\left(\sum_{j=0}^{\infty} C_j\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{i=0}^{n} B_i C_{n-i}\right)$$



Näin ollen

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(tA)^k}{k!}\right)\left(\sum_{j=0}^{\infty} \frac{(sA)^j}{j!}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{i=0}^{n} \frac{t^i s^{n-i}}{i!(n-i)!} A^i \cdot A^{n-i}\right)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{n!} \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} t^i s^{n-i}\right) A^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(t+s)^n}{n!} A^n$$

(iii) Soveltamalla (ii)-kohtaa kertomilla $t=1$ ja $s=-1$ nähdään, että

TO 25.2

3

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}\right)\left(\sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-A)^j}{j!}\right) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(A+(-A))^n}{n!}\right) + I = I \qquad \square$$

Lemman 4.3 nojalla voidaan määritellä

<u>Määr 4.4</u> <u>Matriisien eksponenttifunktio</u> on

$$\exp : M_n(\mathbb{K}) \to GL(n,\mathbb{K}), \quad \exp(A) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}$$

Lemma 4.3 sanoo tällöin että $\forall t,s \in \mathbb{K}$ ja $A \in M_n(\mathbb{K})$

$$\exp(tA)\exp(sA) = \exp((t+s)A) \quad \text{ja}$$

$$\exp(A)^{-1} = \exp(-A)$$

Matriisikertolaskun epäkommutatiivisuuden takia sen sijaan $\exp(A)\exp(B)$ ei välttämättä ole sama kuin $\exp(A+B)$.

<u>Lemma 4.5</u>

Jos $AB=BA$, niin $\exp(A+B) = \exp(A)\exp(B) = \exp(B)\exp(A)$.

<u>Tod</u>

Jos $AB=BA$, niin

$$(A+B)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} A^i B^{n-i}$$

ja Lemman 4.3 (ii) todistus voidaan toistaa. $\square$

TO 25.11

4

Lemma 4.6

Jos $\|A-I\|<1$, niin $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}(A-I)^k$ suppenee itseisesti.

Tod

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left\| \frac{(-1)^{k-1}}{k}(A-I)^k \right\| \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \|A-I\|^k \leq \sum_{k=1}^{\infty} \|A-I\|^k$$

ja tämä potenssisarja suppenee jos $\|A-I\|<1$. $\square$

Määr 4.7 Matriisilogaritmi on

$$\log : \underbrace{B_{\|\cdot\|}(I,1)}_{= \{A \in M_n(\mathbb{K}) : \|A-I\|<1\}} \to M_n(\mathbb{K}), \quad \log(A) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}(A-I)^k$$

Lemma 4.8

$\exp \circ \log = id$ ja $\log \circ \exp = id$ kun ne ovat määriteltyjä. Toisin sanoen,

(i) Jos $\|A-I\|<1$, niin $\exp \circ \log(A) = A$

(ii) Jos $\|\exp(A)-I\|<1$, niin $\log \circ \exp(A) = A$

Tod

Sivuutetaan. Heuristisesti: reaaliset eksponentiaali ja logaritmi ovat toistensa käänteisfunktiot joten myös sarjojen suppenemissäteiden sisällä $\forall x \in \mathbb{R}$, $|x-1|<1$ $\quad e^{\log x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}(x-1)^k \right)^n = x$

Matriisien A ja I kommutoinnin nojalla vastaavan osoittaminen matriiseille onnistuu.

Ehto $\|\exp(A)-I\|<1$ toteutuu kun $\|A\|<\log 2$:

$$\|\exp(A)-I\| = \left\| \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k \right\| \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\|A\|^k}{k!} = e^{\|A\|}-1 < e^{\log 2}-1 = 1.$$

Eksponenttiaalin määritteminen

Lemma 4.9

$\exp(BAB^{-1}) = B\exp(A)B^{-1} \quad \forall A \in M_n(\mathbb{K}),\ B \in GL(n,\mathbb{K})$

Tod

HT

(Blokki)diagonaalimatriisille $A = \begin{bmatrix} B_1 & & \\ & \ddots & \\ & & B_n \end{bmatrix}$

$$A^k = \begin{bmatrix} B_1^k & & \\ & \ddots & \\ & & B_n^k \end{bmatrix} \Rightarrow \exp(A) = \begin{bmatrix} \exp(B_1) & & \\ & \ddots & \\ & & \exp(B_n) \end{bmatrix}$$

Näin ollen jos $A \in M_n(\mathbb{K})$ on diagonalisoituva, eli $A = UDU^{-1}$ joillekin $U \in GL(n,\mathbb{K})$ ja $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$,

$$\exp(A) = \exp(UDU^{-1}) = U\exp D \cdot U^{-1} = U \cdot \mathrm{diag}(e^{\lambda_1}, \ldots, e^{\lambda_n})\, U^{-1}$$

Yleisesti matriisit eivät ole diagonalisoituvia, missä tapauksessa puhutaan yleisemmästä Jordan-muodon käsitteestä.
Kuitenkin monet tärkeät erityistapaukset (esim. symmetriset ja hermiittiset matriisit) ovat diagonalisoituvia.

Lause 4.10

Matriisi $A \in M_n(\mathbb{K})$ on diagonalisoituva $\Leftrightarrow$ on olemassa kanta $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{K}^n$ ominaisvektoreita $Ax_k = \lambda_k$.

Tod

"$\Rightarrow$" Olkoon $A = U\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}U^{-1}$, $U \in GL(n,\mathbb{K})$.

Olkoot $x_1, \ldots, x_n$ matriisin U sarakkeet. Tällöin $\{x_1, \ldots, x_n\}$ on kanta ja

$$Ax_j = U\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}U^{-1}x_j = U\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}e_j = U\lambda_j e_j = \lambda_j x_j,$$

joten vektorit $x_1, \ldots, x_n$ ovat ominaisvektoreita.

"$\Leftarrow$" Asetetaan $U = [x_1 \ \ldots \ x_n]$. Tällöin

$$U^{-1}AUe_j = U^{-1}Ax_j = U^{-1}\lambda_j x_j = \lambda_j e_j,$$

joten $U^{-1}AU$ on diagonaalimatriisi. $\square$

TO 25.1

G

Esim 4.11

Määritetään $\exp(A)$ matriisille $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & -1 \end{bmatrix}$

Ominaisarvot $\det(A-\lambda I) \overset{\text{lasku}}{=} -\lambda(\lambda-1)^2 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 0$ tai $\lambda = 1$.

Ominaisvektorit:

$\lambda = 0$: $\quad Ax = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = 0 \\ 2x_1 - x_3 = 0 \end{cases} \overset{\text{valitaan kantavek.}}{\Rightarrow} u_1 = (1, 0, 2)$

$\lambda = 1$: $\quad (A-I)x = 0 \Leftrightarrow x_1 - x_2 - x_3 = 0 \overset{\text{valitaan kanta}}{\Rightarrow} u_2 = (1,1,0)$, $u_3 = (1,0,1)$

Muodostetaan ominaisvektoreista kannanvaihtomatriisi

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \overset{\text{lasku}}{\Rightarrow} U^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

Näille $U^{-1}AU = \mathrm{diag}(0,1,1)$, joten

$$\exp(A) = U \underbrace{\mathrm{diag}(1,e,e)}_{=\exp(\mathrm{diag}(0,1,1))} U^{-1} = \begin{bmatrix} 2e-1 & -e+1 & -e+1 \\ 0 & e & 0 \\ 2e-2 & -2e+2 & -e+2 \end{bmatrix}$$

On kaksi syytä miksi ominaisvektorit eivät aina muodosta kantaa

(1) Algebrallinen epätäydellisyys (tapaus $\mathbb{K}=\mathbb{R}$) polynomilla $\det(A-\lambda I)$ on liian vähän juuria

(2) Matriisilla on yleistettyjä ominaisvektoreita, eli vektoreita $u\in\mathbb{K}^n$ joille $(A-\lambda I)u\neq 0$, mutta $(A-\lambda I)^k u=0$ jollekin $k>1$.

Tapaus (1) tapahtuu olennaisesti ainoastaan reaalisen matriisin

$$A=\begin{bmatrix}0&-1\\1&0\end{bmatrix}$$

kanssa. Tälle $\det(A-\lambda I)=+\lambda^2+1>0\ \forall\lambda\in\mathbb{R}$, ja

$$\exp(A)=\begin{bmatrix}\cos 1&-\sin 1\\ \sin 1&\cos 1\end{bmatrix}$$

Syy tähän kummallisen oloiseen eksponentiaaliin on se, että $A=\rho(i)$ kompleksiupotukselle $\rho:\mathbb{C}\to M_2(\mathbb{R})$.
Koska ρ on jatkuva renkashomomorfismi ja eksponentiaali määritellään sarjana,

$$\exp\circ\rho=\rho\circ\exp$$

$$\begin{tikzcd}\mathbb{C} \arrow[r, "\rho"] \arrow[d, "\exp"'] & M_2(\mathbb{R}) \arrow[d, "\exp"] \\ \mathbb{C}^* \arrow[r, "\rho"'] & GL(2,\mathbb{R})\end{tikzcd}$$

$$\Rightarrow \exp(A)=\exp(\rho(i))=\rho(\exp(i))$$
$$=\rho(e^i)=\rho(\cos 1+i\sin 1)$$

Tämän takia myös reaalisessa tapauksessa pitää ottaa kompleksiset ominaisarvot ja -vektorit huomioon.

Yleistetyn ominaisvektorin tapauksessa matriisi ei ole diagonalisoituva vaan matriisin ns. Jordan muoto sisältää ~~epätriviaaleja~~ Jordan blokkeja

TO 25.1 8

$$J(\lambda,r) = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & & \\ 0 & \lambda & 1 & \ddots & \\ & 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ & & & \lambda & 1 \\ & & & \ddots & \lambda \end{bmatrix} \in M_r(\mathbb{C})$$

Tällaiselle matriisille λ on ainoa ominaisarvo:

$$p(x) = \det\left(J(\lambda,r) - xI\right) = (\lambda - x)^r$$

mutta ainoastaan $e_1 \in \mathbb{C}^r$ on ominaisvektori.

Sen sijaan muille kantavektoreille

$$J(\lambda,r)e_k = e_{k-1} + \lambda e_k \Rightarrow \left(J(\lambda,r) - \lambda I\right)^k e_k = 0$$
$$\left(J(\lambda,r) - \lambda I\right)^{k-1} e_k \neq 0$$

eli e_k on k:n kertaluvun ominaisvektori.

$$e_k \xrightarrow{J-\lambda I} e_{k-1} \xrightarrow{J-\lambda I} e_{k-2} \to \cdots \to e_1 \xrightarrow{J-\lambda I} 0$$

Jordan muodon konstruktiossa yleistetyistä ominaisvektoreista etsitään kanta jolla on ylläolevan kaltainen hierarkia.

Tätä konstruktiota voi pitää ortonormalisaation kaltaisena prosessina.

Esim 4.12

Olkoon $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$. $\det(A - \lambda I) = (2-\lambda)^3$, joten ainoa ominaisarvo on $\lambda = 2$.

Standardikanta e_1, e_2, e_3 ei hajoa ketjuihin halutulla tavalla

$$e_2 \xrightarrow{A-2I} e_1 \xrightarrow{A-2I} 0$$
$$e_3 \xrightarrow{A-2I} e_1$$

Sen sijaan korvaamalla e_3 vektorilla $e_3 - e_2$ saadaan

$$e_2 \xrightarrow{A-2I} e_1 \xrightarrow{A-2I} 0$$
$$e_3 - e_2 \xrightarrow{A-2I} 0$$

ja $\{e_1, e_2, e_3 - e_2\}$ on edelleen $\mathbb{C}^3$:in kanta.

Asettamalla $U = [e_1 \quad e_2 \quad e_3 - e_2] \in GL(3,\mathbb{C})$, saadaan

$$A = U \left[\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 2 \end{array}\right] U^{-1} = U \begin{bmatrix} J(2,2) & 0 \\ 0 & J(2,1) \end{bmatrix} U^{-1}.$$

Yhden parametrin aliryhmät

TI 6.2
1

Määr 4.13

Polku (tai käyrä) $\alpha : (a,b) \to M_n(\mathbb{K})$ on <u>derivoituva</u> jos raja-arvo

$$\alpha'(t) = \lim_{s\to t} \frac{\alpha(s)-\alpha(t)}{s-t}$$

on olemassa $\forall t \in (a,b)$. $\alpha'(t) \in M_n(\mathbb{K})$ on <u>polun α derivaatta pisteessä t.</u>

Polun derivaattaa tullaan merkitsemään myös $\alpha'(t) = \frac{d}{dt}\alpha(t) = \frac{d}{ds}\alpha(s)\Big|_{s=t}$.

Lemma 4.14

$\mathbb{R} \to GL(n,\mathbb{K}) : t \mapsto e^{At}$ on derivoituva kaikilla $A \in M_n(\mathbb{K})$

ja $\frac{d}{dt} e^{At} = Ae^{At}$.

Tod

Potenssisarjan suppenemissäteen sisällä derivaatta saadaan ottamalla derivaatta termeittäin. Lemman 4.3 nojalla potenssisarjan

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} \cdot t^k$$

suppenemissäde on ∞, eli tämä suppenee $\forall t \in \mathbb{R}$. Näin ollen $\forall t \in \mathbb{R}$

$$\frac{d}{dt} e^{At} = \frac{d}{dt} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} t^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} k t^{k-1} = A \sum_{k=\phi}^{\infty} \frac{A^{k-1}}{(k-1)!} t^{k-1} = Ae^{At}. \quad \square$$

Määr 4.15

Olkoon G matriisiryhmä.

<u>Yhden parametrin semiryhmä G:ssä</u> on käyrä $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to G$ joka on derivoituva 0:ssa ja jolle $\gamma(s+t) = \gamma(s)\gamma(t)$ kun $s,t,s+t \in (-\varepsilon,\varepsilon)$.

Jos $\varepsilon = \infty$, eli $\gamma : \mathbb{R} \to G$, niin γ on <u>yhden parametrin aliryhmä G:ssä</u>.

Huom

Ehdosta $\gamma(0+0) = \gamma(0)\gamma(0)$ seuraa että $\gamma(0) = I$.

TI 6.2
2

Lemma 4.16

Olkoon G matriisiryhmä ja $\gamma:(-\varepsilon,\varepsilon)\to G$ yhden parametrin semiryhmä.
Tällöin γ on kaikkialla derivoituva ja

$$\frac{d}{dt}\gamma(t)=\gamma'(t)=\gamma'(0)\cdot\gamma(t)=\gamma(t)\cdot\gamma'(0)$$

Tod

Olkoon $t\in(-\varepsilon,\varepsilon)$. Kun $|h|<\varepsilon-|t|$, $\gamma(t+h)$ on määritelty ja

$$\gamma(h)\gamma(t)=\gamma(h+t)=\gamma(t+h)=\gamma(t)\gamma(h).$$

Näin ollen

$$\gamma'(t)=\lim_{h\to 0}\frac{\gamma(t+h)-\gamma(t)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\gamma(h)\gamma(t)-I\gamma(t)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\gamma(h)-I}{h}\gamma(t)=\gamma'(0)\gamma(t)$$

ja vastaavasti $\gamma'(t)=\gamma(t)\gamma'(0)$. $\square$

Lemma 4.17

Olkoon $\gamma:(-\varepsilon,\varepsilon)\to G$ yhden parametrin semiryhmä.
Olkoon $\gamma:(-\varepsilon,\varepsilon)\to G$ yhden parametrin aliryhmä
Tällöin on olemassa yksikäsitteinen yhden parametrin aliryhmä
$\hat\gamma:\mathbb{R}\to G$ jolle $\forall t\in(-\varepsilon,\varepsilon)$ $\gamma(t)=\hat\gamma(t)$.

Tod

Olkoon $t\in\mathbb{R}$. Riittävän suurelle $m\in\mathbb{N}$ $t/m\in(-\varepsilon,\varepsilon)$.
Haluttu yhden parametrin aliryhmä saadaan määrittelemällä

$$\hat\gamma(t)=\gamma(t/m)^m.$$

Tarkistetaan, että tämä määritelmä on hyvin asetettu, eli että se ei riipu luvun m valinnasta.

Jos t/m ja t/n ovat molemmat välillä $(-\varepsilon,\varepsilon)$ niin myös $t/mn\in(-\varepsilon,\varepsilon)$.
Tällöin

$$\gamma(t/m)^m=\gamma(nt/mn)^m=\left(\gamma(t/mn)^n\right)^m=\gamma(mt/mn)^n=\gamma(t/n)^n,$$

joten määritelmä on hyvin asetettu.

Se, että $\hat\gamma$ on yhden parametrin aliryhmä saadaan kommutatiivisuudesta

$$\gamma(a)\gamma(b)=\gamma(a+b)=\gamma(b+a)=\gamma(b)\gamma(a)\quad\forall a,b\in(-\varepsilon,\varepsilon).$$

Olkoot $t,s\in\mathbb{R}$. Olkoon $m\in\mathbb{N}$ riittävän iso, jotta $\frac{t}{m},\frac{s}{m},\frac{t+s}{m}\in(-\varepsilon,\varepsilon)$.
Tällöin kommutatiivisuuden ja $\hat\gamma$ määritelmän nojalla

$$\hat\gamma(t)\hat\gamma(s)=\gamma(t/m)^m\gamma(s/m)^m=\left(\gamma(t/m)\gamma(s/m)\right)^m=\gamma\left(\tfrac{t+s}{m}\right)^m=\hat\gamma(t+s)$$

Yhden parametrin aliryhmän derivoituvuus ehto on välitön, sillä

$$\hat{\gamma}'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{\hat{\gamma}(h) - \hat{\gamma}(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\gamma(h) - \gamma(0)}{h} = \gamma'(0)$$

koska $\hat{\gamma}(h) = \gamma(h)$ $\forall |h| < \varepsilon$.

Yksikäsitteisyys seuraa homomorfismiominaisuudesta. Jos $\hat{\gamma}_2 : \mathbb{R} \to G$ on yhden parametrin aliryhmä jolle $\hat{\gamma}_2(t) = \gamma(t)$ $\forall t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, niin

$$\hat{\gamma}_2(t) = \hat{\gamma}_2(t/m)^m \quad \forall m \in \mathbb{N}$$

joten $\hat{\gamma}$:n määritelmän perusteella $\hat{\gamma}_2(t) = \hat{\gamma}(t)$. □

Lause 4.18

$\gamma : \mathbb{R} \to G$ on yhden parametrin aliryhmä $\Rightarrow$ $\gamma(t) = \exp(tA)$ jollekin $A \in M_n(\mathbb{K})$

Tod

Olkoon $A = \gamma'(0)$. Lemman 4.16 nojalla γ toteuttaa differentiaaliyhtälön

$$\gamma'(t) = A\gamma(t) = \gamma(t)A$$

Toisaalta Lemman 4.14 nojalla myös $B : \mathbb{R} \to GL(n, \mathbb{K})$

$$B : t \mapsto e^{At}$$

toteuttaa saman differentiaaliyhtälön,

Lisäksi $e^{A\cdot 0} = I = \gamma(0)$. Näin ollen $t \mapsto \gamma(t)B(t)^{-1}$ on käyrä jolle

$\gamma(0)B(0)^{-1} = I$ ja

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\gamma(t)B(t)^{-1} &= \left(\frac{d}{dt}\gamma(t)\right)B(t)^{-1} + \gamma(t)\left(\frac{d}{dt}B(t)^{-1}\right) \\
&= \gamma'(t)\exp(-tA) + \gamma(t)\left(\frac{d}{dt}\exp(-tA)\right) \\
&= A\gamma(t)\exp(-tA) - \gamma(t)A\exp(-tA) \\
&= \underbrace{(A\gamma(t) - \gamma(t)A)}_{=0}\exp(-tA) \\
&= 0
\end{aligned}$$

eli $\gamma(t)B(t)^{-1} = I$ $\forall t \in \mathbb{R}$ $\Rightarrow$ $\gamma(t) = B(t) = \exp(tA)$ □

T16.7
3

III Lien algebra – Lien ryhmä vastaavuus

5. Matriisiryhmän tangenttiavaruus ja Lien algebrat

Määr 5.1

Matriisiryhmän $G < GL(n, \mathbb{K})$ tangenttiavaruus pisteessä $U \in G$ on

$$T_U G = \{\gamma'(0) \in M_n(\mathbb{K}) : \gamma \text{ derivoituva käyrä, ja } \gamma(0) = U\}$$
$$\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to G$$

Huom

Yhden parametrin aliryhmä on aina derivoituva käyrä I:n läpi.

Jos $\gamma(t) = \exp(tA) \in G$, niin $\gamma'(0) = A \in T_I G$.

Myöhemmin osoitetaan että $T_I G$ on täsmälleen matriisien $A \in M_n(\mathbb{K})$ kokoelma joille $\exp(tA) \in G$ $\forall t \in \mathbb{R}$.

Lemma 5.2

$T_U G$ ~~on~~ $\subset M_n(\mathbb{K})$ on $\mathbb{R}$-vektoriavaruus

Tod

Olkoot $A, B \in T_U G$ ja $\alpha : (-\varepsilon_1, \varepsilon_1) \to G$ sekä $\beta : (-\varepsilon_2, \varepsilon_2) \to G$ käyriä joille $\alpha'(0) = A$ ja $\beta'(0) = B$.

(i) $A + B \in T_U G$: Tarkastellaan differentioituvaa käyrää

$$\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to G \qquad \gamma(t) = \alpha(t) \cdot U^{-1} \cdot \beta(t), \qquad \varepsilon = \min(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$$

Derivaatan tulosäännön nojalla

$$\gamma'(0) = \alpha'(0) \cdot U^{-1} \cdot \beta(0) + \alpha(0) \cdot U^{-1} \cdot \beta'(0)$$
$$= A \cdot U^{-1} \cdot U + U \cdot U^{-1} \cdot B = A + B.$$

Koska lisäksi $\gamma(0) = \alpha(0) U^{-1} \beta(0) = U U^{-1} U = U$, $A + B = \gamma'(0) \in T_U G$.

(ii) $\lambda A \in T_U G$ $\forall \lambda \in \mathbb{R}$: Tarkastellaan differentioituvaa käyrää

$$\gamma : \left(-\frac{\varepsilon_1}{\lambda}, \frac{\varepsilon_1}{\lambda}\right) \to G \qquad \gamma(t) = \alpha(\lambda t).$$

Tälle $\gamma(0) = \alpha(\lambda \cdot 0) = \alpha(0) = U$ joten

$$\gamma'(0) = \lambda \alpha'(0) = \lambda A \in T_U G$$

(iii) $0 \in T_U G$: Vakiokäyrän $\gamma : \mathbb{R} \to G$, $\gamma(t) = U$ derivaatta on $\gamma'(0) = 0 \in T_U G$. $\square$

T162
5

Huom

Tangenttiavaruus määritellään käyrien $\gamma: I \to G$, $I \subset \mathbb{R}$ avulla.
Tämän takia tapauksessa $\mathbb{K}=\mathbb{C}$ $T_U G$ ei välttämättä ole $\mathbb{C}$-vektoriavaruus.

Lause 5.3

Matriisiryhmän tangenttiavaruudet ovat isomorfisia, eli: $T_{U_1}G \simeq T_{U_2}G$ $\forall U_1, U_2 \in G$.

Tod

Riittää osoittaa, että $T_I G \simeq T_U G$. Määritellään

$$L: T_I G \to T_U G, \quad L(A) = UA.$$

1) L on hyvin määritelty:

Jos $A \in T_I G$, on olemassa käyrä $\alpha: (-\varepsilon, \varepsilon) \to G$ jolle $\alpha(0)=I$ ja $\alpha'(0)=A$.
Tällöin käyrälle $\tilde{\alpha}: (-\varepsilon, \varepsilon) \to G$, $\tilde{\alpha}(t) = U\alpha(t)$, $\tilde{\alpha}(0) = UI = U$ ja $\tilde{\alpha}'(0) = UA$,
joten $UA \in T_U G$.

2) L on lineaarinen:

Tämä seuraa matriisitulon lineaarisuudesta:

$$L(A+B) = U(A+B) = UA + UB = L(A) + L(B) \text{ ja}$$
$$L(\lambda A) = U\lambda A = \lambda UA = \lambda L(A).$$

3) L on bijektio:

Koska $U \in G < GL(n, \mathbb{K})$, on olemassa $U^{-1} \in G$.
Kuvauksena $M_n(\mathbb{K}) \to M_n(\mathbb{K})$, $A \mapsto U^{-1}A$ on kuvauksen L käänteiskuvaus, mutta tässä rajoitetaan pienempään osajoukkoon, joten pitää tarkistaa, että

$$T_U G \to T_I G, \quad A \mapsto U^{-1}A$$

on hyvin määritelty.

Tämä seuraa samasta argumentista kuin 1):

Jos $A \in T_U G$, niin $A = \alpha'(0)$ jollekin derivoituvalle käyrälle $\alpha: (-\varepsilon, \varepsilon) \to G$ jolle $\alpha(0) = U$. Tällöin $\tilde{\alpha}(t) = U^{-1}\alpha(t)$ on derivoituva käyrä jolle $\tilde{\alpha}(0) = U^{-1}U = I$ ja $\tilde{\alpha}'(0) = U^{-1}A$. $\Rightarrow U^{-1}A \in T_I G$. $\square$

Määr 5.4

Matriisiryhmän G <u>dimensio</u> on $\dim G = \dim_{\mathbb{R}} T_I G$.
Jos $T_I G$ on $\mathbb{C}$-vektoriavaruus, niin
matriisiryhmän G <u>kompleksinen dimensio</u> on $\dim_{\mathbb{C}} G = \dim_{\mathbb{C}} T_I G$.

Esim 5.5

Määritetään yleisen lineaarisen ryhmän $GL(n,\mathbb{R})$ tangenttiavaruus $T_I GL(n,\mathbb{R})$.
Määritelmän mukaan $T_I GL(n,\mathbb{R}) \subset M_n(\mathbb{R})$.
Toisaalta, mielivaltaiselle $A \in M_n(\mathbb{R})$, $t \mapsto \exp(tA)$ on käyrä
jolle $\exp(0 \cdot A) = I$ ja $\frac{d}{dt}\exp(tA) = A$, joten

$$T_I GL(n,\mathbb{R}) = M_n(\mathbb{R})$$

Näin ollen $\dim GL(n,\mathbb{R}) = \dim M_n(\mathbb{R}) = n^2$.

Huom. edellä inkluusio $M_n(\mathbb{R}) \subset T_I GL(n,\mathbb{R})$ olisi voitu todistaa
myös käyttäen käyriä

$$t \mapsto I + tA$$

sillä riittävän pienille $t \in \mathbb{R}$, $I + tA \in GL(n,\mathbb{R})$.
Yleisesti matriisiryhmille $G < GL(n,\mathbb{K})$ sen sijaan vaikka $A \in T_I G$,
on mahdollista että $I + tA \notin G \quad \forall t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Matriisiryhmän (tai yleisemmin Lien ryhmän) tangenttiavaruudella on enemmänkin kuin pelkkä vektoriavaruusrakenne. Annetaan ensin abstrakti määritelmä

TO 8.2

2

Määr 5.6

$\mathbb{K}$ – Lien algebra (tai Lien algebra kunnan $\mathbb{K}$ yli)

on $\mathbb{K}$-vektoriavaruus $\mathfrak{g}$ varustettuna Lien sulkeilla, eli $\mathbb{K}$-bilineaarisella kuvauksella $[\cdot,\cdot] : \mathfrak{g}\times\mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ jolle

(i) $\forall x,y \in \mathfrak{g}$ $\quad [x,y] = -[y,x]$ (antikommutatiivisuus)

(ii) $\forall x,y,z \in \mathfrak{g}$ $\quad [x,[y,z]] + [y,[z,x]] + [z,[x,y]] = 0$ (Jacobin identiteetti)

Lien algebroja merkitään usein goottisilla kirjaimilla $\mathfrak{g}, \mathfrak{h}, \ldots$

$\mathbb{K}$-bilineaarisuus tarkoittaa, että

$$[x, ay] = a[x,y] \quad , \quad [ax, y] = a[x,y] \quad \forall a \in \mathbb{K},\ x,y \in \mathfrak{g}$$

$$[x, y+z] = [x,y] + [x,z] \quad , \quad [x+y, z] = [x,z] + [y,z] \quad \forall x,y,z \in \mathfrak{g}.$$

(Tylsä) Esimerkki 5.7

Mikä tahansa $\mathbb{K}$-vektoriavaruus V varustettuna nollasulkeilla $[x,y] = 0$ $\forall x,y \in V$ on Lien algebra.

Tämä on n.s. abelinen Lien algebra

Esimerkki 5.8

Asetetaan $\mathbb{R}^3$:issa $[x,y] = x \times y$ (ristitulo). Tällöin $(\mathbb{R}^3, [\cdot,\cdot])$ on Lien algebra.

Standardikannalle

$$[e_1, e_2] = -[e_2, e_1] = e_3$$

$$[e_2, e_3] = -[e_3, e_2] = e_1$$

$$[e_3, e_1] = -[e_1, e_3] = e_2$$

Muista: imaginäärikvaternioille $u,v \in \mathbb{R}i + \mathbb{R}j + \mathbb{R}k$, $uv = -u\cdot v + u\times v$ joten yllä olevat ovat vain relaatiot

$$ij = k \quad , \quad jk = i \quad , \quad ki = j$$

Antikommutatiivisuus saadaan ristitulon antikommutatiivisuudesta.
Tarkistetaan Jacobin identiteetti vektoreille $x=e_1$, $y=e_2$, $z=e_3$

TO 8.2

3

$$[e_1,[e_2,e_3]]+[e_2,[e_3,e_1]]+[e_3,[e_1,e_2]]$$
$$=[e_1,e_1]+[e_2,e_2]+[e_3,e_3]=0,$$

sillä antikommutatiivisuus $\Rightarrow [x,x]=0 \quad \forall x$.

Lemma 5.9

Olkoon $\mathfrak{g}$ $\mathbb{K}$-vektoriavaruus varustettuna $\mathbb{K}$-bilineaarisella antikommutatiivisella $[\cdot,\cdot]:\mathfrak{g}\times\mathfrak{g}\to\mathfrak{g}$.
Olkoon $\{x_1,\dots,x_n\}$ $\mathfrak{g}$:n $\mathbb{K}$-kanta. Jos

$$[x_i,[x_j,x_k]]+[x_j,[x_k,x_i]]+[x_k,[x_i,x_j]]=0$$

$\forall\, 1\le i<j<k\le n$, niin $(\mathfrak{g},[\cdot,\cdot])$ on $\mathbb{K}$-Lien algebra.

Tod

HT

Lause 5.10

$M_n(\mathbb{K})$ varustettuna kommutaattorisulkeilla $[A,B]=AB-BA$ on $\mathbb{K}$-Lien algebra. Tätä Lien algebraa merkitään usein $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{K})$.

Tod

$M_n(\mathbb{K})$ on $\mathbb{K}$-vektoriavaruus.

Kommutaattorin bilineaarisuus:

$$[\lambda A+B,C]=(\lambda A+B)C-C(\lambda A+B)=\lambda(AC-CA)+BC-CB=\lambda[A,C]+[B,C]$$

(Toisen komponentin lineaarisuus saadaan antikommutatiivisuudesta)

Antikommutatiivisuus:

$$[A,B]=AB-BA=-(BA-AB)=-[B,A]$$

Jacobi:

$$[A,[B,C]]+[B,[C,A]]+[C,[A,B]]$$
$$=A(BC-CB)-(BC-CB)A+B(CA-AC)-(CA-AC)B+C(AB-BA)-(AB-BA)C$$
$$=\underline{ABC}-\underline{ACB}-BCA+CBA+BCA-BAC-CAB+ACB+CAB-CBA-ABC+BAC$$
$$=0$$

$\square$

TO 8.2
4

Määr 5.11

Olkoon $\mathfrak{g}$ $\mathbb{K}$-Lien algebra. $\mathbb{K}$-aliavaruus $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ on $\mathfrak{g}$:n <u>$\mathbb{K}$-Lien alialgebra</u> jos se on suljettu Lien sulkeiden suhteen eli $\forall x, y \in \mathfrak{h}$: $[x,y] \in \mathfrak{h}$.
Tällöin merkitään aliryhmänotaatiota imitoiden $\mathfrak{h} < \mathfrak{g}$.

Lause 5.12

Matriisiryhmän $G < GL(n,\mathbb{K})$ tangenttiavaruus $T_I G$ on $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{K})$:n $\mathbb{R}$-Lien alialgebra.
Jos $\mathbb{K}=\mathbb{C}$ ja $T_I G < \mathfrak{gl}(n,\mathbb{C})$ on $\mathbb{C}$-aliavaruus, se on myös $\mathbb{C}$-Lien alialgebra.

Tod

Lemman 5.2 nojalla $T_I G \subset \mathfrak{gl}(n,\mathbb{K})$ $\left(= M_n(\mathbb{K}), [\cdot,\cdot]\right)$ on $\mathbb{R}$-aliavaruus. Riittää siis osoittaa, että $\forall A, B \in T_I G$

$$[A,B] = AB - BA \in T_I G$$

Olkoot $\alpha : (-\varepsilon,\varepsilon) \to G$ ja $\beta : (-\delta,\delta) \to G$ derivoituvia ~~käyriä~~, joille $\alpha(0) = \beta(0) = I$ ja $\alpha'(0) = A$, $\beta'(0) = B$.

Tarkastellaan kuvausta

$$F : (-\varepsilon,\varepsilon) \times (-\delta,\delta) \to G, \quad F(t,s) = \alpha(t)\beta(s)\alpha(t)^{-1}\beta(s)^{-1}$$

eli ns. $\alpha(t)$:n ja $\beta(s)$:n ryhmäkommutaattoria.

Kaikilla $t \in (-\varepsilon,\varepsilon)$ kuvaus $s \mapsto F(t,s)$ on derivoituva käyrä ja $F(t,0) = I$, ja tulosäännön nojalla

$$\frac{d}{ds} F(t,s)\Big|_{s=0} = \alpha(t)\beta'(0)\alpha(t)^{-1}\beta(0)^{-1} + \underbrace{\alpha(t)\beta(0)\alpha(t)^{-1}}_{\substack{=\alpha(t)\alpha(t)^{-1} \\ = I}} \underbrace{\frac{d}{ds}\beta(s)^{-1}\Big|_{s=0}}_{\substack{= -\beta'(0) \\ = -B}}$$

$$= \alpha(t) B \alpha(t)^{-1} - B \in T_I G$$

Koska $T_I G$ on vektoriavaruus, myös

$$T_I G \ni \frac{\alpha(t) B \alpha(t)^{-1} - B}{t} \xrightarrow{t \to 0} \frac{d}{dt}\alpha(t) B \alpha(t)^{-1}\Big|_{t=0}$$

$$= \alpha'(0) B \alpha(0)^{-1} + \alpha(0) B \frac{d}{dt}\alpha(t)^{-1}\Big|_{t=0}$$

$$= AB + B(-A) = AB - BA = [A,B]$$

Koska $T_I G \subset \mathfrak{gl}(n,\mathbb{K})$ on suljettu, $[A,B] \in T_I G$. $\square$

Maar 5.13

TO 8.2
5

Matriisiryhmän $G < GL(n,\mathbb{K})$ Lien algebra on

$\mathfrak{g} = T_I G$ varustettuna kommutaattorisulkeilla $[A,B] = AB - BA$.

Esimerkin 5.5 nojalla yleisen lineaarisen ryhmän $GL(n,\mathbb{K})$ Lien algebra on $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{K})$, mikä on tämän notaation motivaatio.

Vastaavasti merkitään

$\mathfrak{sl}(n,\mathbb{K})$ = $SL(n,\mathbb{K})$:n Lien algebra
$\mathfrak{so}(n)$ = $SO(n)$:n Lien algebra
$\mathfrak{o}(n)$ = $O(n)$:n Lien algebra
$\mathfrak{u}(n)$ = $U(n)$:n Lien algebra
$\mathfrak{su}(n)$ = $SU(n)$:n Lien algebra, yne...

Tarkastellaan seuraavaksi millaisista matriiseista nämä Lien algebrat koostuvat, eli määritellään ehtoja, jotka takaavat esim. että $\exp(tA) \in SL(n,\mathbb{K})$ $\forall t \in \mathbb{R}$.

TO 8.2

6

Jos $\gamma:(-\varepsilon,\varepsilon)\to SL(n,\mathbb{K})$ on derivoituva käyrä, niin

$$\frac{d}{dt}\det\gamma(t)=\frac{d}{dt}1=0$$

Lemma 5.14

Olkoon $\gamma:(-\varepsilon,\varepsilon)\to GL(n,\mathbb{K})$ derivoituva käyrä jolle $\gamma(0)=I$.

Tällöin $\frac{d}{dt}\det\gamma(t)\Big|_{t=0}=\operatorname{tr}\gamma'(0)$

Tod

Merkitään $a_{rs}(t)=\big(\gamma(t)\big)_{rs}$ matriisin $\gamma(t)$ alkioita ja

$C_{rs}(t)$:llä matriisin $\gamma(t)$ kofaktorimatriisia rivin r sarakkeen s suhteen.

Kehittämällä determinantti viimeisen rivin suhteen saadaan tällöin

$$\det\gamma(t)=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{n+k}a_{nk}(t)\cancel{C_{nk}(t)}\cdot\det C_{nk}(t)$$

Derivoimalla tämä saadaan

$$\frac{d}{dt}\det\gamma(t)\Big|_{t=0}=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{n+k}a_{nk}'(0)\det C_{nk}(0)+\sum_{k=1}^{n}(-1)^{n+k}\underbrace{a_{nk}(0)}_{=\begin{cases}1, & n=k\\ 0, & n\neq k\end{cases}}\frac{d}{dt}\det C_{nk}(t)\Big|_{t=0}$$

Koska $\gamma(0)=I$, $a_{nk}(0)=\begin{cases}1, & n=k\\ 0, & n\neq k\end{cases}$ ja $\det C_{nk}=\begin{cases}1, & n=k\\ 0, & n\neq k\end{cases}$.

Näin ollen

$$\frac{d}{dt}\det\gamma(t)\Big|_{t=0}=(-1)^{n+n}a_{nn}'(0)+(-1)^{n+n}\frac{d}{dt}\det C_{nn}(t)\Big|_{t=0}$$

$$=a_{nn}'(0)+\frac{d}{dt}\det C_{nn}(t)\Big|_{t=0}$$

Kehittämällä $\det C_{nn}(t)$ rivin $n-1$ suhteen, $\det C_{n-1,n-1}(t)$ rivin $n-2$ suhteen jne saadaan tällöin

$$\frac{d}{dt}\det\gamma(t)\Big|_{t=0}=a_{nn}'(0)+a_{n-1,n-1}'(0)+\frac{d}{dt}\det C_{n-1,n-1}(t)\Big|_{t=0}$$

$$=\dots=\sum_{k=1}^{n}a_{kk}'(0)=\operatorname{tr}\gamma'(0)$$

$\square$

Lemma 5.15

TO 8.2

7

$\det \exp(tA) = e^{\operatorname{tr} A}$ $\forall A \in M_n(\mathbb{K})$

Tod

Määritellään $\gamma: \mathbb{R} \to \mathbb{K}^*$, $\gamma(t) = \det(\exp(tA))$.

Koska $t \mapsto \exp(tA)$ on derivoituva käyrä ja $\exp(0A) = I$,

Lemman 5.14 nojalla

$$\frac{d}{dt}\gamma(t)\Big|_{t=0} = \operatorname{tr}\left(\frac{d}{dt}\exp(tA)\Big|_{t=0}\right) = \operatorname{tr} A$$

Koska det on homomorfismi ja Lauseen 4.3 nojalla $\exp(t+h)A = \exp(tA)\exp(hA)$,

$$\gamma'(t) = \lim_{h\to 0}\frac{\gamma(t+h)-\gamma(t)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\det\exp((t+h)A) - \det\exp(tA)}{h}$$

$$= \left(\lim_{h\to 0}\frac{\det\exp(hA) - \cancel{\det I}}{h}\right)\det\exp(tA)$$

$$= \gamma'(0)\,\gamma(t) = (\operatorname{tr} A)\cdot\gamma(t)$$

Näin ollen γ toteuttaa saman differentiaaliyhtälön kuin

$t \mapsto e^{\operatorname{tr}(A)\cdot t}$: $\frac{d}{dt} e^{\operatorname{tr}(A)\cdot t} = (\operatorname{tr} A)\, e^{\operatorname{tr}(A)\cdot t}$

ja toisaalta $\det\exp(0\cdot A) = \det I = 1$, $e^{(\operatorname{tr} A)\cdot 0} = e^0 = 1$,

joten differentiaaliyhtälön ratkaisun yksikäsitteisyys antaa väitteen $\square$

$[\ x' = c\cdot x$, $c = \operatorname{tr} A \in \mathbb{K}$

TI 13.2

Lause 5.16

$$\mathfrak{sl}(n,\mathbb{K}) = \{A \in M_n(\mathbb{K}) : \operatorname{tr} A = 0\}$$

Tod

"$\subset$" Lemman 5.14 nojalla, jos $A = \alpha'(0) \in \mathfrak{sl}(n,\mathbb{K}) = T_I\, SL(n,\mathbb{K})$ jollekin $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \to SL(n,\mathbb{K})$, $\alpha(0) = I$, niin

$$\operatorname{tr} A = \operatorname{tr} \alpha'(0) = \frac{d}{dt} \det \alpha(t)\Big|_{t=0} = \frac{d}{dt} 1\Big|_{t=0} = 0.$$

"$\supset$" Jos $\operatorname{tr} A = 0$, niin Lemman 5.15 nojalla

$$\det \exp(tA) = e^{\operatorname{tr} A} = e^0 = 1$$

joten $t \mapsto \exp(tA)$ on derivoituva käyrä $SL(n,\mathbb{K})$:ssa. $\square$

Lause 5.17

$$\mathfrak{so}(n) = \mathfrak{o}(n) = \{A \in M_n(\mathbb{R}) : A + A^T = 0\} \quad (= \text{"antisymmetriset matriisit"})$$

Tod

Huomaa että jokainen polku $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \to O(n)$, jolle $\alpha(0) = I$ on itse asiassa polku $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \to SO(n)$, sillä $\det A = \pm 1 \ \forall A \in O(n)$. Tämän takia $\mathfrak{so}(n) = \mathfrak{o}(n)$.

Jos $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \to SO(n)$ on derivoituva ja $\alpha(0) = I$, niin

$$\frac{d}{dt} \alpha(t)^T \alpha(t)\Big|_{t=0} = (\alpha'(0))^T \alpha(0) + \alpha(0)^T \alpha'(0) = \alpha'(0)^T + \alpha'(0)$$

ja toisaalta $\alpha(t)^T \alpha(t) = I$, mistä seuraa että

$$\forall A \in \mathfrak{so}(n) \quad A^T + A = 0.$$

Jos taas $A \in M_n(\mathbb{R})$ on mielivaltainen matriisi jolle $A + A^T = 0$, niin $\alpha(t) = \exp(At)$ toteuttaa ehdon

$$\alpha(t)^T \alpha(t) = \exp(At)^T \exp(At) = \exp(A^T t)\exp(At) = \exp(-At)\exp(At)$$

$$= \exp(-At + At) = \cancel{\exp((A^T+A)t)} = I$$

joten $\exp(At) \in O(n)$, ja edelleen $A \in \mathfrak{so}(n)$. $\square$

Lause 5.18

TI 13.2

2

$$\mathfrak{u}(n) = \{A \in M_n(\mathbb{C}) : \quad A + A^* = 0\}$$ ("antihermiittiset matriisit")

$$\mathfrak{su}(n) = \{A \in M_n(\mathbb{C}) : \quad A + A^* = 0, \quad \operatorname{tr} A = 0\}$$

Huomaa kompleksisen ja reaalisen tapauksen ero!
reaalisessa tapauksessa ehdosta $A + A^T = 0$ seuraa $\operatorname{tr} A = 0$, sillä antisymmetrisen (reaali)matriisin diagonaalilla on vain nollia.
Kompleksisessa tapauksessa taas ehto $A + A^*$ sanoo vain, että diagonaalin alkioille $a_{kk} + \overline{a_{kk}} = 0$, eli että diagonaalialkiot ovat imaginaarisia.

Lauseen 5.18 tod

Olkoon $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \to U(n)$ derivoituva polku, $\alpha(0) = I$.
kuten reaalisessa tapauksessa

$$0 = \frac{d}{dt} \alpha(t)\alpha(t)^* \Big|_{t=0} = \alpha'(0)\alpha(0)^* + \alpha(0)(\alpha'(0))^* = \alpha'(0) + \alpha'(0)^*.$$

ja käyrälle $\alpha(t) = \exp(tA)$, $A + A^* = 0$,

$$\alpha(t)\alpha(t)^* = \exp(tA)\exp(tA^*) = \exp(tA)\exp(-tA) = I.$$

$SU(n)$:n tapaus seuraa identiteetistä

$$SU(n) = U(n) \cap SL(n, \mathbb{C}),$$

sillä tällöin (*)

$$\mathfrak{su}(n) = \mathfrak{u}(n) \cap \mathfrak{sl}(n, \mathbb{C}) = \{A + A^* = 0\} \cap \{\operatorname{tr} A = 0\}. \quad \square$$

Edellä kohdassa (*) hyödynnettiin seuraavaa

Lemma 5.19

Olkoot $G, H < GL(n,\mathbb{K})$ matriisiryhmiä ja $\mathfrak{g}, \mathfrak{h} < \mathfrak{gl}(n,\mathbb{K})$ niiden Lien algebrat. Tällöin matriisiryhmän $G \cap H$ Lien algebra on $\mathfrak{g} \cap \mathfrak{h}$.

Tod

HT

Huom

Toisin kuin voisi arvata, $U(n)$ ja $SU(n)$ eivät ole $\mathbb{C}$-Lien algebroja. Nimittäin esimerkiksi

$$A = \begin{bmatrix} i & & & \\ & -i & & \\ & & 0 & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 0 \end{bmatrix} \in SU(n) \qquad \left(A^* = \begin{bmatrix} -i & & & \\ & i & & \\ & & \ddots & \\ & & & 0 \end{bmatrix} = -A \right)$$

mutta

$$iA = \begin{bmatrix} -1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 0 & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 0 \end{bmatrix} \notin SU(n) \qquad \left((iA)^* = \bar{i} A^* = -\bar{i} A = iA \right)$$

Itse asiassa $U(n)$ on "yhtä lähellä" (✓ kaukana) kompleksista Lien algebraa kuin $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{R})$.

Tämän väitteen täsmällistä muotoilua varten tarkastellaan hieman reaalisia vs. kompleksisia Lien algebroja.

Määritelmä 5.20

Kuvaus $\varphi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ $\mathbb{K}$-Lien algebrojen $\mathfrak{g}$ ja $\mathfrak{h}$ välillä on $\mathbb{K}$-Lien algebrojen morfismi jos φ on $\mathbb{K}$-lineaarinen ja

$$\varphi([X,Y]) = [\varphi(X), \varphi(Y)] \quad \forall X, Y \in \mathfrak{g}.$$

Jos φ on lisäksi bijektiivinen, φ on $\mathbb{K}$-Lien algebrojen isomorfismi.

Lien algebran kompleksifikaatio

Määritelmä 5.20

$\mathbb{R}$-Lien algebra $\mathfrak{g}$:n kompleksifikaatio on $\mathbb{C}$-Lien algebra $\mathfrak{h}$, jolle $\mathfrak{g} < \mathfrak{h}$ ja $\dim_{\mathbb{C}} \mathfrak{h} = \dim_{\mathbb{R}} \mathfrak{g}$.
Tällöin merkitään $\mathfrak{h} = \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$.

Lause 5.22

(i) Jokaisella (äärellisulotteisella) Lien algebralla on kompleksifikaatio

(ii) Jos $\mathfrak{h}_1$ ja $\mathfrak{h}_2$ ovat $\mathfrak{g}$:n kompleksifikaatiota, niin on olemassa $\mathbb{C}$-Lien algebrojen isomorfismi $\varphi: \mathfrak{h}_1 \to \mathfrak{h}_2$ jolle $\varphi(X) = X$ $\forall X \in \mathfrak{g}$.

Todistuksen idea

(i) Tehdään $\mathbb{R}$-kannasta $\mathbb{C}$-kanta (abstraktisti $\mathfrak{h} = \mathfrak{g} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$)

(reaalisten vektoriavaruuksien tensoritulo)

(ii) "Tehdään $\mathbb{C}$-kannasta $\mathbb{R}$-kanta".
Koska $\dim_{\mathbb{C}} \mathfrak{h}_1 = \dim_{\mathbb{R}} \mathfrak{g} = \dim_{\mathbb{C}} \mathfrak{h}_2$, saadaan yksikäsitteinen kuvaus $\varphi: \mathfrak{h}_1 \to \mathfrak{h}_2$.

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{h}_1 & \overset{\varphi}{\dashrightarrow} & \mathfrak{h}_2 \\ \vee & & \vee \\ \mathfrak{g} & \xrightarrow{id} & \mathfrak{g} \end{array}$$

Se että φ on $\mathbb{C}$-Lien algebrojen morfismi seuraa siitä että $\mathrm{Id}: \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ on $\mathbb{R}$-Lien algebrojen morfismi.

Lause 5.23 Ti 13.2 5

$\mathfrak{u}(n)_{\mathbb{C}} = \mathfrak{gl}(n,\mathbb{C}) = \mathfrak{gl}(n,\mathbb{R})_{\mathbb{C}}$ ja

$\mathfrak{su}(n)_{\mathbb{C}} = \mathfrak{sl}(n,\mathbb{C}) = \mathfrak{sl}(n,\mathbb{R})_{\mathbb{C}}$

Tod

Merkitään E^{rs} matriisia jolle $(E^{rs})_{ij} = \begin{cases} 1, & r=i,\ s=j \\ 0, & r\neq i \text{ tai } s\neq j \end{cases}$

$\mathfrak{u}(n)$:llä on $\mathbb{R}$-kanta (HT):

iE^{kk}, $k=1,\dots,n$, $E^{rs}-E^{sr}$, $1\le r<s\le n$, $iE^{rs}+iE^{sr}$, $1\le r<s\le n$

$\mathfrak{u}(n)_{\mathbb{C}}$ sisältää nämä kerrottuna mielivaltaisilla kompleksiluvuille,

eli erityisesti matriisit

$-i(iE^{kk}) = E^{kk}$, $k=1,\dots,n$

$-\frac{1}{2}(E^{rs}-E^{sr}) - \frac{i}{2}(iE^{rs}+iE^{sr}) = E^{sr}$, $1\le r<s\le n$

$\frac{1}{2}(E^{rs}-E^{sr}) - \frac{i}{2}(iE^{rs}+iE^{sr}) = E^{rs}$, $1\le r<s\le n$

jotka muodostavat $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{C})$:n $\mathbb{C}$-kannan.

$\mathfrak{su}(n)$:n tapaus on vastaava. Ainoa ero on, että matriisien iE^{kk} sijaan kannassa on matriisit $i(E^{kk}-E^{k+1,k+1})$, $k=1,\dots,n-1$, (HT) ja se että ei saada koko $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{C})$:n kantaa vaan $\mathfrak{sl}(n,\mathbb{C})$:n, sillä $\mathbb{R}$-kanta toteuttaa $\operatorname{tr} A=0$ $\Rightarrow$ myös $\mathbb{C}$-kanta toteuttaa $\operatorname{tr} A=0$.

Tapaukset $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{R})_{\mathbb{C}} = \mathfrak{gl}(n,\mathbb{C})$ ja $\mathfrak{sl}(n,\mathbb{R})_{\mathbb{C}} = \mathfrak{sl}(n,\mathbb{C})$ saadaan myös vastaavasti:

$\mathfrak{gl}(n,\mathbb{R}) = \operatorname{span}_{\mathbb{R}}\{E^{rs} : 1\le r,s\le n\}$, $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{C}) = \operatorname{span}_{\mathbb{C}}\{E^{rs} : 1\le r,s\le n\}$,

$\mathfrak{sl}(n,\mathbb{R}) = \operatorname{span}_{\mathbb{R}}\{E^{rs} ; r\neq s\} \cup \{E^{kk}-E^{k+1,k+1}, 1\le k\le n-1\}$ $\square$

6 Matriisiryhmien ja niiden Lien algebrojen ominaisuuksien yhteyksiä

Lemma 6.1

Olkoot $G, H < GL(n,\mathbb{K})$ matriisiryhmiä ja $\mathfrak{g}, \mathfrak{h} < \mathfrak{gl}(n,\mathbb{K})$ niiden Lien algebrat. Tällöin

$$G < H \implies \mathfrak{g} < \mathfrak{h}$$

Tod

Koska sekä $\mathfrak{g}$ että $\mathfrak{h}$ ovat $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{K})$:n alialgebroja, riittää tarkistaa että $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{h}$.

Olkoon $A \in \mathfrak{g}$. Tällöin on olemassa derivoituva käyrä $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \to G$ jolle $\alpha(0) = I$ ja $\alpha'(0) = A$.

Toisaalta α on tällöin myös käyrä H:ssa, joten $A = \alpha'(0) \in \mathfrak{h}$. $\square$

Huom

Käänteinen implikaatio "$\mathfrak{g} < \mathfrak{h} \Rightarrow G < H$" ei aina päde.

Esim jos $G = O(n)$ ja $H = SO(n)$, niin $\mathfrak{g} = \mathfrak{o}(n) = \mathfrak{so}(n) = \mathfrak{h}$, mutta $O(n) \not\subset SO(n)$.

(Tämä pätee kuitenkin jossain määrin:

$\mathfrak{g} < \mathfrak{h} \Rightarrow \exists$ yksikäsitteinen $\tilde{G} < H$ Lien ryhmä, joka on yhtenäinen ja jonka Lien algebra on $\mathfrak{g}$

mutta tämän ei tarvitse olla matriisiryhmä, sillä se ei ole aina suljettu.)

Monesti Lien teoriassa ryhmien relaatioista seuraa helposti algebrojen relaatio, mutta toiseen suuntaan joudutaan lisäämään jokin rajoite siihen mikä ryhmä algebraan liitetään.

Kanoninen valinta saadaan niin sanotusta "Lien kolmannesta lauseesta" jonka mukaan jokainen äärellisulotteinen Lien algebra on jonkin ~~Lien ryh~~ yhdesti yhtenäisen Lien ryhmän Lien algebra.

Aliryhmä $\longleftrightarrow$ alialgebra

Normaali aliryhmä $\longleftrightarrow$ ideaali

Määritelmä 6.2

Lien algebran $\mathfrak{g}$ <u>ideaali</u> on aliavaruus $\mathfrak{i} \subset \mathfrak{g}$, jolle $\underbrace{[\mathfrak{i},\mathfrak{g}]}_{=\operatorname{span}\{[x,y]:\, x\in\mathfrak{i},\, y\in\mathfrak{g}\}} \subset \cancel{\mathfrak{g}}\,\mathfrak{i}$ eli:

$$\forall X \in \mathfrak{g} \ \forall I \in \mathfrak{i} \quad [I,X] \in \mathfrak{i}$$

Tällöin merkitään $\mathfrak{i} \triangleleft \mathfrak{g}$.

Vertaa normaalin aliryhmän määritelmään

$$H \triangleleft G \Leftrightarrow \forall g\in G \ \forall h \in H \quad ghg^{-1} \in H$$

$$\Longleftrightarrow \forall g \in G \ \forall h \in H \quad ghg^{-1}h^{-1} \in H$$

Yllä Lien algebran kommutaattori $[\cdot,\cdot]$ korvaa ryhmäkommutaattorin $ghg^{-1}h^{-1}$.

Lemma 6.3

Olkoot G,H matriisiryhmiä ja $\mathfrak{g},\mathfrak{h}$ niiden Lien algebrat. Tällöin

$$H \triangleleft G \Rightarrow \mathfrak{h} \triangleleft \mathfrak{g}$$

<u>Tod</u>

Lemman 6.1 nojalla riittää osoittaa $[\mathfrak{h},\mathfrak{g}] \subset \mathfrak{h}$.

Olkoot $A \in \mathfrak{h}$ ja $B \in \mathfrak{g}$, ja $\alpha: (-\varepsilon,\varepsilon) \to H$, $\beta: (-\delta,\delta) \to G$ derivoituvat käyrät joille $\alpha(0) = I = \beta(0)$, $\alpha'(0) = A$, $\beta'(0) = B$.

Tarkastellaan jälleen kuvausta (ks Lause 5.12)

$$F: (-\varepsilon,\varepsilon)\times(-\delta,\delta) \to G, \quad F(t,s) = \alpha(t)\beta(s)\alpha(t)^{-1}\beta(s)^{-1}.$$

Tällä kertaa, koska $H \triangleleft G$ ja $\alpha(t) \in H$, $F(t,s) \in H \ \forall t,s$.

Näin ollen argumentoiden kuten Lauseessa 5.12 saadaan

$$[A,B] = \lim_{t\to 0} \frac{\frac{d}{ds} F(t,s)\big|_{s=0}}{t} \in \mathfrak{h}$$

$\square$

Ideaalit Lien algebroissa voidaan karakterisoida vastaavalla tavalla Lien algebrojen morfismien kautta kuin normaalit aliryhmät homomorfismien avulla:

TO 15.2
3

Lemma 6.4

Olkoon $\varphi: \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ Lien algebrojen morfismi. Tällöin $\ker \varphi \triangleleft \mathfrak{g}$.

Tod

$\ker \varphi = \{A \in \mathfrak{g} : \varphi(A) = 0\}$

Jos $A \in \ker \varphi$ ja $B \in \mathfrak{g}$, niin Lien sulkeiden lineaarisuuden nojalla

$$\varphi([A,B]) = [\varphi(A), \varphi(B)] = [0, \varphi(B)] = 0 \Rightarrow [A,B] \in \ker \varphi. \quad \square$$

Määritelmä 6.5

Olkoot G, H matriisiryhmiä ja $\mathfrak{g}, \mathfrak{h}$ niiden Lien algebrat. Olkoon $\Phi: G \to H$ derivoituva matriisiryhmien morfismi (eli derivoituva homomorfismi). Kuvauksen Φ derivaatta on kuvaus

$$\Phi_*: \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}, \quad \Phi_*\left(\frac{d}{dt}\alpha(t)\Big|_{t=0}\right) = \frac{d}{dt}\Phi \circ \alpha(t)\Big|_{t=0},$$

missä $\alpha: (-\varepsilon, \varepsilon) \to G$ on mikä tahansa derivoituva käyrä jolle $\alpha(0) = I$.

Lause 6.6

Olkoon $\Phi : G \to H$ derivoituva homomorfismi matriisiryhmien G ja H välillä. Tällöin $\Phi_* : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ on $\mathbb{R}$-Lien algebrojen morfismi.

Tod

Kuvauksen Φ_* lineaarisuus todistetaan käyttäen Lemman 5.2 tekniikoita ja ehto $\Phi_*([A,B]) = [\Phi_*(A), \Phi_*(B)]$ käyttäen Lauseen 5.12 tekniikkaa.

(i) $\Phi_*(A+B) = \Phi_*(A) + \Phi_*(B)$:

Olkoot $A, B \in \mathfrak{g}$ ja α sekä β vastaavat derivoituvat käyrät G:ssä. Olkoot $A,B \in \mathfrak{g}$ ja α sekä β vastaavat derivoituvat käyrät G:ssä.

Tällöin $\Phi \circ \alpha$ ja $\Phi \circ \beta$ ovat derivoituvia käyriä H:ssa,

$\Phi \circ \alpha(0) = \Phi(I) = I = \Phi \circ \beta(0)$ ja

$$\Phi_*(A+B) = \Phi_*\left(\frac{d}{dt}\alpha(t)\beta(t)\Big|_{t=0}\right) = \frac{d}{dt}\Phi(\alpha(t)\beta(t))\Big|_{t=0}$$

$$\overset{\Phi \text{ homom}}{=} \frac{d}{dt}\Phi(\alpha(t))\,\Phi(\beta(t))\Big|_{t=0} = \frac{d}{dt}\Phi(\alpha(t))\Big|_{t=0} + \frac{d}{dt}\Phi(\beta(t))\Big|_{t=0}$$

$$= \Phi_*(A) + \Phi_*(B)$$

(ii) $\Phi_*(\lambda A) = \lambda \Phi_*(A)$:

$\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $A \in \mathfrak{g}$

$$\Phi_*(\lambda A) = \Phi_*\left(\frac{d}{dt}\alpha(\lambda t)\Big|_{t=0}\right) = \frac{d}{dt}\Phi \circ \alpha(\lambda t)\Big|_{t=0} = \lambda \frac{d}{dt}\Phi \circ \alpha(t)\Big|_{t=0} = \lambda \Phi_*(A)$$

(iii) $\Phi_*([A,B]) = [\Phi_*(A), \Phi_*(B)]$:

$$\Phi_*([A,B]) = \Phi_*\left(\lim_{t \to 0} \frac{\frac{d}{ds}\alpha(t)\beta(s)\alpha(t)^{-1}\beta(s)^{-1}\big|_{s=0}}{t}\right)$$

$$\overset{\Phi \text{ jva hom.}}{=} \lim_{t \to 0} \frac{\Phi_*\left(\frac{d}{ds}\alpha(t)\beta(s)\alpha(t)^{-1}\beta(s)^{-1}\big|_{s=0}\right)}{t}$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{\frac{d}{ds}(\Phi \circ \alpha(t))(\Phi \circ \beta(s))(\Phi \circ \alpha(t))^{-1}(\Phi \circ \beta(s))^{-1}\big|_{s=0}}{t}$$

$$= [\Phi_*(A), \Phi_*(B)]$$

$\square$

Vaikka määr 6.5 puhuu vain käyristä identiteettimatriisin läpi, homomorfismiominaisuutta käyttäen saadaan lauseke mielivaltaisen derivoituvan käyrän kuvan derivaatalle.

TO 15.2
5

Lause 6.7

Olkoon $\Phi : G \to H$ derivoituva homomorfismi ja $\Phi_* : \mathfrak{g} \to H$ sen derivaatta. Olkoon $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \to G$ derivoituva käyrä. Tällöin $\forall t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$

$$\frac{d}{dt} \Phi \circ \alpha(t) = \Phi(\alpha(t))\, \Phi_*(\alpha(t)^{-1}\alpha'(t))$$

Tod

Huomaa, että $\alpha'(t) \in T_{\alpha(t)}G$, joten $\alpha(t)^{-1}\alpha'(t) \in T_I G = \mathfrak{g}$, joten ylläoleva lauseke on mielekäs.

Määritelmän 6.5 käyttämiseksi kiinnitetään $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ ja määritellään

$$\beta : (-\varepsilon - t, \varepsilon - t) \to G, \quad \beta(s) = \alpha(t)^{-1}\alpha(t+s)$$

Tällöin β on derivoituva käyrä, $\beta(0) = \alpha(t)^{-1}\alpha(t) = I$ ja

$$\beta'(0) = \frac{d}{ds} \alpha(t)^{-1}\alpha(t+s)\Big|_{s=0} = \alpha(t)^{-1} \frac{d}{ds} \alpha(t+s)\Big|_{s=0} = \alpha(t)^{-1}\alpha'(t).$$

Määr 6.5 mukaan

$$\Phi_*(\beta'(0)) = \frac{d}{ds} \Phi \circ \beta(s)\Big|_{s=0} = \frac{d}{ds} \Phi\left(\alpha(t)^{-1}\alpha(t+s)\right)\Big|_{s=0}$$

$$\overset{\Phi \text{ hom}}{=} \Phi(\alpha(t))^{-1} \frac{d}{ds} \Phi(\alpha(t+s))\Big|_{s=0}$$

$$= \Phi(\alpha(t))^{-1} \frac{d}{dt} \Phi(\alpha(t))$$

Tästä saadaan Lauseen väite kertomalla $\Phi(\alpha(t))$:llä:

$$\frac{d}{dt} \Phi \circ \alpha(t) = \Phi(\alpha(t))\, \Phi_*(\beta(0)) = \Phi(\alpha(t))\, \Phi_*(\alpha(t)^{-1}\alpha'(t)) \quad \square$$

Lien teorian kannalta tärkeä eksponentiaalin ominaisuus on seuraava fakta;

TO 15.2

6

Fakta

Olkoon G matriisiryhmä ja $\mathfrak{g}$ sen Lien algebra.
Tällöin $\exp(\mathfrak{g}) \subset G$.

Tämän faktan todistaminen vaatii enemmän differentiaaligeometrisiä tarkasteluja kuin tällä kurssilla ehditään käsitellä, mutta otetaan se siitä huolimatta käyttöön.

Huomaa, että monien konkreettisten matriisiryhmien kanssa väite pystytään todistamaan suoraan, kuten teimme esim. $GL(n,\mathbb{K})$, $SL(n,\mathbb{K})$, $O(n)$, $SO(n)$, $U(n)$, $SU(n)$ tapauksissa.

Eksponentiaali toimii linkkinä algebran ja ryhmän välillä!

Lause 6.8

Olkoon $\Phi : G \to H$ derivoituva homomorfismi ja $\Phi_* : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ sen derivaatta.
Tällöin $\exp \circ \Phi_* = \Phi \circ \exp$,

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{g} \arrow[r, "\Phi_*"] \arrow[d, "\exp"'] & \mathfrak{h} \arrow[d, "\exp"] \\ G \arrow[r, "\Phi"] & H \end{tikzcd}$$

Tod

Olkoon $A \in \mathfrak{g}$. Tarkastellaan käyriä

$\beta : \mathbb{R} \to H$, $\quad \beta(t) = \exp \circ \Phi_*(tA) = \exp(t\,\Phi_*(A))$

$\gamma : \mathbb{R} \to H$, $\quad \gamma(t) = \Phi \circ \exp(tA)$

Nämä ovat derivoituvia käyriä, ja

$$\frac{d}{dt}\beta(t) = \exp(t\,\Phi_* A) \cdot \Phi_* A = \beta(t) \cdot \Phi_*(A),$$

$$\frac{d}{dt}\gamma(t) \overset{\text{Lause 6.7}}{=} \Phi(\exp tA)\, \Phi_*(\exp(-tA) \cdot \exp(tA) \cdot A) = \gamma(t)\, \Phi_*(A),$$

eli ne toteuttavat saman lineaarisen differentiaaliyhtälön.

Lisäksi $\beta(0) = \exp(\Phi_* 0) = \exp(0) = I$ ja
$\gamma(0) = \Phi(\exp(0)) = \Phi(I) = I$,

joten $\beta(t) = \gamma(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}$ $\square$

TI 27.2

1

Lause 6.9

Olkoon G matriisiryhmä ja $\mathfrak{g}$ sen Lien algebra.

Tällöin $\langle \exp(\mathfrak{g}) \rangle < G$.

Lisäksi, jos G on polkuyhtenäinen, $\langle \exp(\mathfrak{g}) \rangle = G$.

Tässä notaatiolla $\langle X \rangle$ tarkoitetaan joukon X virittämää aliryhmää

$$\langle X \rangle = \{ x_1 x_2 \cdots x_n : \quad x_j \in X \ \forall j \in \{1, \dots, n\}, \ n \in \mathbb{N} \}$$

Lauseen jälkimmäistä väitettä varten todistetaan hieman yleisempi aputulos

Lemma 6.10

Olkoon G polkuyhtenäinen matriisiryhmä ja $U \subset G$ jokin avoin joukko jolle $I \in U$.

Tällöin $\langle U \rangle = G$.

Tod

Olkoon $\alpha : [0,1] \to G$ polku jolle $\alpha(0) = I$.

Riittää osoittaa että $\alpha(t) \in \langle U \rangle \quad \forall t$.

Tarkastellaan joukkoa

$$X = \{ t \in [0,1] : \quad \alpha(s) \in \langle U \rangle \ \forall s \leq t \}$$

koska $I = \alpha(0) \in U \subset \langle U \rangle$, ~~Polun α jatkuvuuden nojalla~~ ainakin $0 \in X$, eli $X \neq \emptyset$.

Olkoon $t \in X \subset [0,1]$, jolloin $\alpha(t) \in \langle U \rangle$, eli $\alpha(t) = u_1 \cdots u_n$, $u_1, \dots, u_n \in U$.

Tällöin $\alpha(t) \in u_1 \cdots u_n U \subset \langle U \rangle$ ja joukko $u_1 \cdots u_n U$ on avoin kuvauksen $F : G \to G$, $F(h) = (u_1 \cdots u_n)^{-1} h$ alkukuvana avoimesta joukosta U.

Polun α jatkuvuuden nojalla $\alpha(t + \varepsilon) \in u_1 \cdots u_n U$ riittävän pienille $\varepsilon > 0$.

$\Rightarrow$ joukolla X ei voi olla ylärajaa $t < 1$ $\Rightarrow \max X = 1 \Rightarrow \alpha(t) \in \langle U \rangle \ \forall t$ $\square$

Lauseen 6.9 tod

Hyväksymme aiemmin käyttöön faktan $\exp(\mathfrak{g}) \subset G$. Tästä seuraa välittömästi että että $\langle \exp(\mathfrak{g}) \rangle \subset G$, joten koska $\langle \exp(\mathfrak{g}) \rangle$ on ryhmä, se on G:in aliryhmä.

Lauseen jälkimmäistä väitettä varten hyödynnetään Lemmaa 4.8, jonka mukaan

$$\{A \in GL(n,\mathbb{K}) : \|A-I\|<1\} \subset \exp(\mathfrak{gl}(n,\mathbb{K})) \subset GL(n,\mathbb{K}).$$

Rajoittamalla tämä osajoukkoon G, saadaan

$$\{A \in G : \|A-I\|<1\} \subset \exp(\mathfrak{g}) \subset G.$$

Nyt oletuksen mukaan G on polkuyhtenäinen ja

$$U = \{A \in G : \|A-I\|<1\}$$

on avoin joukko (HT), jolle $I \in U$.

Lemma 6.10 $\Rightarrow$ $G = \langle U \rangle \subset \langle \exp(\mathfrak{g}) \rangle$. $\square$

Huom

Kun $\|A-I\|<1$, $A \in GL(n,\mathbb{K})$ voidaan Lemman 4.8 nojalla kirjoittaa muodossa $A = \exp(X)$ jollekin $X \in \mathfrak{gl}(n,\mathbb{K})$.

Näin ollen jos $\|X\|$ ja $\|Y\|$ ovat riittävän pienet, että $\|\exp(X)\exp(Y) - I\|<1$, niin

$$\exp(X)\exp(Y) = \exp(Z) \qquad \text{jollekin } Z \in \mathfrak{gl}(n,\mathbb{K}).$$

Itse asiassa Z:lle on eksplisiittinen lauseke, ns. Baker–Campbell–Hausdorff kaava, joka antaa Z:n X:in ja Y:in iteroitujen Lien sulkeiden funktiona

$$Z = X + Y + \tfrac{1}{2}[X,Y] + \ldots 3.\ 4.\ 5. \ldots \text{ kertaluvun sulkeita} \ldots$$

Joissakin tapauksissa tämä lauseke suppenee kaikilla $X, Y \in \mathfrak{g}$ ja saadaan

$$\langle \exp(\mathfrak{g}) \rangle = \exp(\mathfrak{g}) = G,$$

ja itse asiassa $\exp: \mathfrak{g} \to G$ ~~[illegible]~~ voi olla tällaisessa tilanteessa jopa diffeomorfismi.

Näin käy esimerkiksi kun $\mathfrak{g}$ on "nilpotentti" eli kun iteroidut Lien sulkeet ovat 0 jostakin kertaluvusta alkaen.

7. Yksinkertaiset Lien ryhmät ja algebrat

TI 27.2
3

Määritelmä 7.1

- Ryhmä G on yksinkertainen, jos sen ainoat normaalit aliryhmät ovat $\{e_G\}$ ja G.
- Yhtenäinen epäkommutatiivinen matriisiryhmä (tai yleisemmin Lien ryhmä) G on yksinkertainen jos sen ainoat $\boxed{\text{yhtenäiset}}$ normaalit aliryhmät ovat $\{I\}$ ja G.
- Epäkommutatiivinen Lien algebra $\mathfrak{g}$ on yksinkertainen jos sen ainoat ideaalit ovat $\{0\}$ ja $\mathfrak{g}$.

"Yksinkertaisuuden" idea on että rakennetta ei voida yksinkertaistaa millään homomorfismilla $G \to H$ jonnekin muualle.

Jos G on yksinkertainen ja $\varphi: G \to H$ on homomorfismi, niin joko

1) $\ker \varphi = \{e_G\} \triangleleft G \Rightarrow \varphi: G \to \varphi(G)$ on isomorfismi ja $\varphi(G)$ on yhtä hankala kuin G, tai
2) $\ker \varphi = G \Rightarrow \varphi: G \to \{e_H\}$ hävittää kaiken informaation

Lien ryhmien/algebrojen tapauksessa määritelmään lisätään yhtenäisyys-rajoite jotta saadaan vastaavuus

$$G \text{ yksinkertainen} \iff \mathfrak{g} \text{ yksinkertainen}$$

Tämän lisäksi yksinkertaisten Lien algebrojen luokittelua varten lisätään epäkommutatiivisuus-vaatimus ($\Rightarrow \mathbb{R}$ ei ole yksinkertainen Lien algebra). Vertaa: 1 ei ole alkuluku.

Yksinkertaisuuden puuttuminen matriisiryhmän tai sen Lien algebrassa näkyy normaali aliryhmä ↔ ideaali vastaavuuden kautta.
Tässä hyödyllinen aputulos on:

TI 27.2
4

Lemma 7.2

Olkoon $\varphi: G \to H$ derivoituva homomorfismi matriisiryhmien välillä ja $\varphi_*: \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ sen derivaatta.
Tällöin matriisiryhmän $\ker \varphi \triangleleft G$ Lien algebra on $\ker \varphi_* \triangleleft \mathfrak{g}$.

Tod
HT

Esim 7.3

$GL(n, \mathbb{K})$ ei ole yksinkertainen: $SL(n, \mathbb{K})$ on normaali yhtenäinen epätriviaali aliryhmä.

Lemma 7.2 $\xRightarrow{\varphi = \det}$ $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{K}) \triangleleft \mathfrak{gl}(n, \mathbb{K})$ on epätriviaali ideaali.
$\Rightarrow \mathfrak{gl}(n, \mathbb{K})$ ei ole yksinkertainen.

TI 27.2

5

Lause 7.4

$SL(n,\mathbb{C})$ on yksinkertainen kaikilla $n \geq 2$.

Tod

Matriisit E^{rs}, $r \neq s$, ja $E^{jj}-E^{nn}$, $j=1,\dots,n-1$ muodostavat $SL(n,\mathbb{C}) = \{A : trA = 0\}$:n kannan.

Olkoon $I \triangleleft SL(n,\mathbb{C})$ epätriviaali ideaali. Osoitetaan, että $I = SL(n,\mathbb{C})$. Olk $X \in I \setminus \{0\}$

Matriisin E^{rs} ainoa nollasta eroava alkio on rivillä r sarakkeella s.

$\Rightarrow$ Matriisin XE^{rs} ainoa nollasta eroava sarake on s, ja tämä sarake on X:n r sarake

Vastaavasti matriisin $-E^{rs}X$ ainoa nollasta eroava rivi on r, joka on X:n s rivi -1:llä kerrottuna

$$\Rightarrow [X,E^{rs}] = XE^{rs} - E^{rs}X = \begin{array}{c} \\ \\ \\ \text{rivi } r \rightarrow \\ \\ \\ \\ \end{array} \begin{bmatrix} & & x_{1r} & & \\ & 0 & \vdots & 0 & \\ & & x_{s-1,r} & & \\ -x_{s1} & \cdots\ -x_{s,s-1} & x_{rr}-x_{ss} & -x_{s,s+1} & \cdots\ -x_{sn} \\ & & x_{s+1,r} & & \\ & 0 & \vdots & 0 & \\ & & x_{nr} & & \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{c} \uparrow \\ \text{sarake } s \end{array}$$

Tapaus (i): $x_{sr} \neq 0$ jollekin $r \neq s$

Toistamalla edellä tarkastelu,

$$[[X,E^{rs}],E^{rs}] = \underbrace{[X,E^{rs}]E^{rs}}_{\substack{\text{siirtää sarakkeen} \\ r \rightsquigarrow s}} - \underbrace{E^{rs}[X,E^{rs}]}_{\substack{\text{siirtää rivin} \\ s \rightsquigarrow r}}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ & 0 & \\ & -x_{s,r} & \\ & 0 & \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ 0 \cdots 0 & x_{s,r} & 0 \cdots 0 \\ 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & -2x_{s,r} & \\ & & \end{bmatrix} \cancel{= 2x_{sr}E^{rs}}$$

$$= -2x_{sr}E^{rs}$$

$\Rightarrow E^{rs} \in I$. $\Rightarrow [[E^{rs},E^{sr}],E^{sr}] = -2E^{sr} \in I$

Tästä saadaan edelleen loput $SL(n,\mathbb{C})$:n kannan alkiot, sillä

$$[E^{ab},E^{bc}] = \begin{cases} E^{ac}, & a \neq c \\ E^{aa}-E^{bb}, & a = c \end{cases}$$

Tapaus (ii) $X_{sr}=0 \quad \forall r \neq s$:

TI 27.2

6

Nyt
$$X = \begin{bmatrix} x_{11} & & & \\ & x_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & x_{nn} \end{bmatrix}$$

ja $\operatorname{tr} X = \sum x_{kk} = 0$.

Oletuksen mukaan $X \neq 0$, joten on olemassa j, k joille $x_{jj} - x_{kk} \neq 0$,
(sillä muutoin $\operatorname{tr} X = \sum_k x_{kk} = n \cdot x_{11} = 0 \Rightarrow x_{11} = \dots = x_{nn} = 0$)

Tällöin
$$[X, E^{jk}] = (x_{jj} - x_{kk}) E^{jk}$$

$\Rightarrow E^{jk} \in I$.

$\Rightarrow I = SL(n, \mathbb{K})$ kuten (i)-kohdassa. $\square$

TO 1.3

1

Seuraus 7.5

$SU(n)$ on yksinkertainen kaikilla $n \geq 2$

Tod

Lauseen 5.23 nojalla $SU(n)_{\mathbb{C}} = SL(n;\mathbb{C})$. Itse asiassa

$SL(n,\mathbb{C}) = SU(n) + i \cdot SU(n)$

ja esitys $A \in SL(n,\mathbb{C}) \rightsquigarrow A = B + iC, \; B, C \in SU(n)$

on yksikäsitteinen.

Jos $I \trianglelefteq SU(n)$ on epätriviaali ideaali, niin $h = I + iI$ on epätriviaali ideaali $SL(n,\mathbb{C})$:ssä:

(i) h on $\mathbb{C}$-vektoriavaruus:

Jos $A, B \in I$ ja $C, D \in I$, niin

$$(A+iB) + (C+iD) = (A+C) + i(B+D) \in h$$

ja jos $A, B \in I$, $c+id \in \mathbb{C}$, niin

$$(c+id)(A+iB) = (cA - dB) + i(cB + dA) \in h$$

(ii) $[h, SL(n,\mathbb{C})] \subset h$:

Jos $A+iB \in h$ ja $C+iD \in SL(n,\mathbb{C})$, niin

$$[A+iB, C+iD] = (A+iB)(C+iD) - (C+iD)(A+iB)$$

$$\cancel{= [C,A] - [D,B] + i([D,A]}$$

$$= [A,C] - [B,D] + i([A,D] + [B,C])$$

Koska I on ideaali, $[A,C], [B,D], [A,D], [B,C] \in I$

ja $A, B \in I$

$\Rightarrow [A+iB, C+iD] \in h$. $\square$

Soveltamalla Lauseen 7.4 strategiaa $SO(n)$:n kantamatriiseihin

$$F^{rs} = E^{rs} - E^{sr}$$

voidaan osoittaa että $SO(n)$ on yksinkertainen kun $n > 4$. | TO 1.3

kun $n \leq 4$ ei ole riittävästi tilaa rivien/sarakkeiden nollaamiseen. | 2

Erillisellä tarkastelulla voidaan kuitenkin osoittaa, että ~~SO(2) ja SO(3)~~ $SO(3)$ on yksinkertainen. (Huom $SO(2) \simeq \mathbb{R}$ ei ole yksinkertainen)

Lause 7.6

$SO(4)$ ei ole yksinkertainen.

"Tod"

Demoissa 4 tarkasteltiin homomorfismia

$$\Phi : SU(2) \times SU(2) \to SO(4) \qquad \Phi(q,p) = qxp^{-1}$$

missä $\mathbb{R}^4$ samaistettiin kvaternioiden $\mathbb{H}$ kanssa.

Tälle $\ker \Phi = \{\pm I\}$ on diskreetti, joten Φ_* on injektio (HT)

Itse asiassa voidaan osoittaa että Φ on surjektio, jolloin $\Phi_* : \mathfrak{su}(2) \times \mathfrak{su}(2) \to \mathfrak{so}(4)$ on isomorfismi,

kääntämällä tämä kuvaus saadaan epätriviaali ~~homomorfismi~~ Lien algebrojen morfismi

$$\mathfrak{so}(4) \xrightarrow{\Phi_*^{-1}} \mathfrak{su}(2) \times \mathfrak{su}(2) \xrightarrow{\pi_1} \mathfrak{su}(2)$$

projektiokuvauksen avulla. $\square$

TO 1.3
3

Määritelmä 7.7

Ryhmän G <u>keskus</u> on

$$Z(G) = \{ g \in G : \quad gh = hg \ \forall h \in G \}$$

Lause 7.8

Olkoon G polkuyhtenäinen matriisiryhmä jolla on diskreetti keskus.
Jos $H \triangleleft G$ on normaali epädiskreetti aliryhmä, niin $T_I H \neq \{0\}$.

Tod

Jos $Z(G)$ on diskreetti mutta H ei, on olemassa matriisin $I \in G$ riittävän pieni ympäristö (eli jollain $\delta < 1$)

$$U = \{ A \in G : \ \|A - I\| < \delta \}$$

jolle $U \cap Z(G) = \{I\}$ ja $U \cap H$ sisältää jonkin matriisin $B \neq I$.

Koska $B \notin Z(G)$ on olemassa jokin $A \in U$ jolle $AB \neq BA$.
Nimittäin jos tällaista $A \in U$ ei olisi, niin B kommutoisi kaikkien $A \in U$ ja edelleen myös kaikkien $A \in \langle U \rangle$ kanssa,
mutta Lemman 6.10 nojalla $\langle U \rangle = G$, jolloin olisi $B \in Z(G)$.

Oletuksen $\delta < 1$ nojalla $\|A - I\| < 1$, joten on olemassa $X \in \mathfrak{g}$ jolle $\exp(X) = A$.
Tarkastellaan polkua $\gamma : \mathbb{R} \to G$

$$\gamma(t) = \exp(tX) B \exp(-tX) B^{-1}.$$

Koska H on normaali aliryhmä ja $B \in H$, itse asiassa $\gamma(t) \in H \ \forall t$.
Näin ollen

$$\gamma'(0) = X - BXB^{-1} \in T_I H,$$

joten riittää osoittaa että $X - BXB^{-1} \neq 0$.

$$X - BXB^{-1} = 0 \Rightarrow X = BXB^{-1} \Rightarrow \underbrace{\exp(X)}_{=A} = \exp(BXB^{-1}) = B \underbrace{\exp(X)}_{A} B^{-1}$$

$$\Rightarrow A = BAB^{-1} \Rightarrow AB = BA \quad ↯$$

Lause 7.9

Olkoon G polkuyhtenäinen matriisiryhmä ja $N \triangleleft G$ diskreetti. Tällöin $N \subset Z(G)$.

Tod

$N \triangleleft G \Rightarrow BAB^{-1} \in N \quad \forall A \in N,\ B \in G.$

Koska kuvaus $\varphi_A : G \to N$, $B \mapsto BAB^{-1}$ on jatkuva, mille tahansa polulle α G:ssä $\varphi_A \circ \alpha$ on polku N:ssä.
Koska N on diskreetti, $\varphi_A \circ \alpha$ on tällöin aina vakiopolku.

Toisaalta, koska G on polkuyhtenäinen, $\forall X \in G$ on polku $I \rightsquigarrow X$

$\cancel{\Rightarrow \varphi(G) = \{I\} \Rightarrow BAB^{-1} = I}$

$\Rightarrow \varphi_A(G) = \{\varphi_A(I)\} = \{IAI^{-1}\} = \{A\}$

$\Rightarrow BA = AB \quad \forall B \in G \Rightarrow A \in Z(G) \qquad \square$

Esim

$SO(n)$, $n > 4$, on yksinkertainen matriisiryhmä, mutta on yksinkertainen ryhmä vain jos n on pariton.

Todetaan ensin, että $Z(SO(n))$ on diskreetti:

Jos $Z(SO(n))$ ei olisi diskreetti, on
$Z(SO(n)) \cap \{A \in SO(n) : \|A - I\| < 1\} \neq \{I\}$
joten löytyy $X \in \mathfrak{so}(n)$ jolle $\exp(X) \in Z(SO(n))$ ja $X \neq 0$
Tällöin $[X, Y] = 0 \quad \forall Y \in \mathfrak{so}(n)$ (HT)
Toisaalta $\underbrace{\{X : [X, Y] = 0 \ \forall Y \in \mathfrak{so}(n)\}}_{= Z(\mathfrak{so}(n))}$ on $\mathfrak{so}(n)$:n ideaali (HT)
joten $\mathfrak{so}(n)$:n yksinkertaisuus $\cancel{\Rightarrow Z(G) = Z(SO(n))}$
$\Rightarrow Z(\mathfrak{so}(n)) = \mathfrak{so}(n)$, mikä on ristiriita sen kanssa
että $\mathfrak{so}(n)$ ei ole abelinen.

Näin ollen $Z(SO(n))$ on diskreetti ja voidaan soveltaa Lausetta 7.8.

TO 1.3

5

Jos $N \lhd SO(n)$ on yhtenäinen ja $N \neq \{I\}$,

L. 7.8 $\Rightarrow$ $T_I N \neq \{0\}$

ja toisaalle $T_I N \lhd \mathfrak{so}(n) \Rightarrow T_I N = \mathfrak{so}(n)$.

Tällöin $N \supset \exp(T_I N) = \exp(\mathfrak{so}(n))$ ja

~~Lauseen~~ Lemman 6.10 nojalla $\langle \exp(\mathfrak{so}(n)) \rangle = SO(n)$.

$\Longrightarrow N = SO(n)$,

eli epätriviaalia yhtenäistä normaalia aliryhmää ei ole.

Kuitenkin jos n on parillinen, $\{\pm I\} \lhd SO(n)$ on epätriviaali epäyhtenäinen normaali aliryhmä, joten tällöin $SO(n)$ ei ole ryhmänä yksinkertainen.